

Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana

Martha Guadalupe del Consuelo Ulloa Calzonzin ¹

¹Universidad de Guanajuato, Licenciatura en física, ulloacm2016@licifug.ugto.mx

*Verano de investigación 2017

Resumen

El proyecto consistió en formular las ecuaciones de Hamilton a partir de la mecánica clásica, comenzando por las ecuaciones de Lagrange que describen sistemas físicos. Para ello se utilizaron métodos matemáticos (cálculo variacional) que nos permitieron llegar a las ecuaciones de Hamilton las que en matemáticas son vistas como variedades simplécticas.

Introducción

En el trabajo realizado se busca mostrar cómo las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden ser transformadas a un sistema Hamiltoniano de $2s$ ecuaciones de primer orden, procedimiento matemático en el que se verán emerger conceptos de la geometría simpléctica.

Para poder llegar al Hamiltoniano utilizamos herramientas del cálculo variacional, procedimientos en que se busca extremizar una función de donde formaremos el Lagrangiano que es una función entre la diferencia de la energía cinética y la potencial. Posteriormente nos apoyaremos en la transformada de Legendre que produce un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que son ecuaciones de $2s$ variables donde finalmente obtendremos el Hamiltoniano.

Obtención de la ecuación de Euler

La ecuación de Euler, es una ecuación diferencial de segundo orden que extremiza una función, es útil en mecánica ya que ayuda a estudiar el principio de mínima acción de un sistema dado, el desarrollo se obtuvo apoyándose en [3], texto de la Universidad de Madrid.

Se comienza por resolver el siguiente funcional:

$$F[f] = \int_{x_1}^{x_2} g(f(x), f'(x); x) dx,$$

dónde se busca una función que haga que el funcional adquiera un valor extremo. Entonces, se tiene una función dada por:

$$g(f(x), f'(x); x)$$

que variará en un intervalo de $[x_1, x_2]$, para mostrar la variación de la función que depende de x se utiliza un δ , dónde al ser

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$$

las condiciones del contorno, entonces una variación con $\delta f(x_1) = \delta f(x_2) = 0$, se traducirá en una variación del funcional:

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} \delta g(f(x), f'(x); x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial g}{\partial f} \delta f + \frac{\partial g}{\partial f'} \delta f' \right) dx.$$

Integrando por partes la segunda integral, y aplicando la variación nula en los extremos (condiciones de contorno):

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial g}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial f'} \right) \right] \delta f$$

la única forma que $\delta F = 0$, es que:

$$\frac{\partial g}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial f'} \right) = 0$$

llamada ecuación de Euler. Esta ecuación se puede generalizar a funciones, en este caso teniendo variaciones en las funciones, entonces, se puede escribir:

$$\delta F_i = \sum_{i=1}^N \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\frac{\partial g}{\partial f_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial f'_i} \right) \right] \delta f_i.$$

Aprendiendo ligaduras

Las ligaduras son relaciones que existen entre las funciones, en sistemas físicos representan las coordenadas y restricciones a las que está sujeto el sistema, se realizan manipulaciones matemáticas a estas funciones, con el fin de poder aplicar a ellas la ecuación de Euler.

Un criterio importante al clasificar ligaduras es si son integrables o no y si éstas dependen del tiempo. Se clasifican en holónomas, no holónomas, esclerónomas y reónomas.

Se estudiaron dos formas de utilizar las ligaduras, dejando una de las funciones perteneciente al sistema en función de la otra, y utilizando los multiplicadores de Lagrange.

Principio de mínima acción

Es un principio estudiado en física desde hace mucho tiempo, al observar Herón de Alejandría que la reflexión de un rayo de luz al viajar de un punto al otro lo hace en la distancia más corta posible, un hecho que no es estrictamente cierto. En 1657 Fermat se dio cuenta que la luz viaja de tal forma que le tome la mínima cantidad de tiempo posible, a raíz de más investigaciones en física se descubrió que la naturaleza sigue el principio de mínima acción, donde los sistemas pueden ser descritos haciendo que ciertas cantidades físicas sean las mínimas posibles.

El principio de mínima acción nos lleva al principio de Hamilton donde se establece que la integral del Lagrangiano en el tiempo debe ser el mínimo posible, en lenguaje matemático esto significa:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i) dt = 0$$

donde T = Energía cinética, U = Energía potencial, L es por tanto el Lagrangiano; de esta expresión se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

Tomando un ejemplo del libro [2] en el que se muestra el uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange en el oscilador armónico. Si el Lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

entonces,

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -kx - m\ddot{x} = 0,$$

$$kx + m\ddot{x} = 0,$$

de donde se obtiene fácilmente la ecuación de Newton:

$$F = ma,$$

donde $F = -kx$ y $a = \ddot{x}$.

Con este ejemplo podemos apreciar que es posible obtener las ecuaciones de movimiento de una partícula sin tener que plantear las ecuaciones de Newton, donde necesariamente se tiene que conocer la fuerza, representan pues una ventaja.

Coordenadas generalizadas

Se suele llamar así a un conjunto de cantidades que especifican el estado de un sistema se denotan como:

$$q_1(t), q_2(t), \dots, q_i(t)$$

las velocidades generalizadas serán:

$$\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_i(t)$$

El Lagrangiano es una función escalar que depende de la energía del sistema, entonces debe ser invariante respecto a las transformaciones en las coordenadas, existen ciertas transformaciones que cambian el Lagrangiano pero dejan las ecuaciones de movimiento invariantes, estas ecuaciones son permitidas.

El Lagrangiano en términos de las coordenadas generalizadas se puede escribir así:

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_i, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i; t),$$

$$L = L(q_j, \dot{q}_j, t),$$

y el principio de Hamilton es:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0,$$

entonces llegamos a:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0. \quad (1)$$

La ecuación (1) junto a las ecuaciones de ligadura y las condiciones iniciales describen el estado de movimiento de un sistema.

Para poder establecer las ecuaciones de Euler-Lagrange es necesario que las fuerzas que actúan en el sistema sean derivables de un potencial y que las ecuaciones de ligadura dependan del tiempo es decir que sean holónomas.

Un ejemplo tomado de [2] muestra un sistema donde se requiere encontrar en coordenadas cartesianas las ecuaciones de movimiento de un proyectil que se mueve en dos dimensiones bajo la acción de la gravedad (ver figura 1).

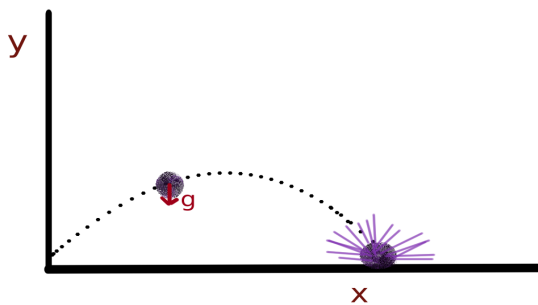


Figura 1: Proyectil

Tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \\ U &= mgy \end{aligned} \right\} \text{Energía}$$

donde $U = 0$ y $y = 0$.

El Lagrangiano del sistema es:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy.$$

Para x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= 0 \\ 0 - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= -m\ddot{x} \\ \ddot{x} &= 0. \end{aligned}$$

Para y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= 0 \\ -mg - m\ddot{y} &= 0 \\ \ddot{y} &= -g. \end{aligned}$$

Newton-Lagrange

Una vez desarrollados los métodos matemáticos del cálculo variacional para obtener las ecuaciones de Lagrange y poder compararlas con las ecuaciones de movimiento de Newton, nos podemos percatar que son las mismas ecuaciones, entonces una pregunta válida es, ¿por qué complicar la mecánica de Newton, con una mecánica Lagrangiana-Hamiltoniana?, la respuesta es que partimos de hechos diferentes para llegar a las mismas ecuaciones.

Por un lado la mecánica clásica requiere analizar además de las fuerzas del propio sistema, las fuerzas externas es decir las fuerzas que actúan sobre el sistema, mientras que la mecánica Hamiltoniana sólo nos pide conocer la energía que está relacionada con el sistema.

Una parte muy importante de destacar de la mecánica lagrangiana es que se puede trabajar con cualquier sistema de coordenadas, siempre que éstas logren simplificar el sistema, ya que sabemos que las transformaciones entre éstas coordenadas no afectarán el Lagrangiano, pues éste es una función escalar en términos de la energía.

Los multiplicadores de Lagrange

Cualesquiera ligaduras que esten expresadas en términos de las velocidades de las partículas

del sistema, tienen la forma: $f(x_{\alpha i}, \dot{x}_{\alpha i}, t) = 0$ y constituyen las ligaduras no holónomas a menos que las ligaduras puedan ser integradas, para crear relaciones entre las coordenadas.

Una ligadura de la forma:

$$\sum_i A_i \dot{x}_i + B = 0 \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Es no integrable (la ligadura es no holónoma), pero si A_i y B tienen la forma:

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad f = f(x_i, t),$$

tal que la ecuación (2) es:

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

que se traduce en:

$$\frac{df}{dt} = 0$$

esta última ecuación puede ser integrada para formar:

$$f(x_i, t) - c = 0.$$

Expresión que ahora es una ligadura holónoma. Se puede concluir que las ligaduras expresadas en la forma diferencial

$$\sum_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0,$$

son equivalentes a tener

$$f_k(x_{\alpha i}, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Si las ligaduras están dadas en forma diferencial, se pueden incorporar directamente a las ecuaciones de Lagrange, usando "Multiplicadores de Lagrange".

El proceso de variaciones involucrado en el principio de Hamilton mantiene constantes los puntos extremos, esto permite que se pueda introducir la siguiente expresión, sin afectar las ecuaciones de movimiento.

$$\sum_j \frac{\partial f_k}{\partial q_j} dq_j = 0 \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, s. \\ k = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Esta manipulación que permiten las ecuaciones de Lagrange es una característica muy ventajosa de la mecánica lagrangiana, donde no es necesario conocer las fuerzas de ligadura del sistema, sin embargo a veces es deseable conocer estas fuerzas.

Los multiplicadores de Lagrange, $\lambda_k(t)$, están muy relacionados con las fuerzas de ligadura, las fuerzas generalizadas de la ligadura Q_j están dadas por:

$$Q_j = \sum_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial q_j}.$$

Energía cinética

La energía cinética en coordenadas rectangulares, es una función cuadrática en función de la derivada de T :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^3 m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i}^2,$$

donde $x_{\alpha,i}(q_j, t)$ y $j = 1, 2, \dots, s$.

$$\dot{x}_{\alpha,i} = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}$$

entonces,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{i,j,k} m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \\ &\quad \sum_{\alpha} \sum_{i,j} m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} \dot{q}_j + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_i m_{\alpha} \frac{\partial^2 x_{\alpha,i}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Abreviando:

$$\begin{aligned} a_{j,k} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_i m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_k}, \\ b_j &= \sum_{\alpha} \sum_i m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t}, \\ c &= \sum_{\alpha} \sum_i \frac{1}{2} m_{\alpha} \frac{\partial^2 x_{\alpha,i}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$T = \sum_{j,k} a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j b_j \dot{q}_j + c.$$

Por otro lado, cuando el sistema es esclerónimo (sin dependencia del tiempo) entonces las derivadas parciales respecto al tiempo desaparecen

$$\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial t} = 0,$$

lo que significa que:

$$b_j = 0, \quad c = 0.$$

Bajo estas condiciones obtenemos,

$$T = \sum_{j,k} a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k.$$

Entonces la energía cinética resulta ser una función homogénea cuadrática. Si diferenciamos la ecuación respecto a \dot{q}_l :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_j a_{l,k} \dot{q}_j + \sum_k a_{k,l} \dot{q}_k$$

y multiplicando por \dot{q}_l ,

$$\sum_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l = \sum_j^l a_{l,k} \dot{q}_j \dot{q}_l + \sum_{k,l} a_{k,l} \dot{q}_k \dot{q}_l,$$

los índices son intercambiables, así que tenemos:

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2 \sum_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k = 2T. \quad (3)$$

Conservación de la energía

El tiempo es homogéneo en un marco de referencia inercial. El Lagrangiano que describe un sistema cerrado no puede depender explícitamente del tiempo, esto es:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

de modo que la derivada total del Lagrangiano se convierte en:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} \ddot{q}_j \right) \quad (4)$$

donde,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

y sustituyendo en la ecuación (4),

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j$$

luego,

$$\frac{dL}{dt} - \sum_j \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

entonces,

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0.$$

La cantidad entre paréntesis es constante en el tiempo y se denotará por la constante $-H$.

$$L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -H \quad (5)$$

Si la energía no depende explícitamente de la velocidad $\dot{x}_{\alpha,i}$ ó del tiempo t , entonces $U = U(x_{\alpha,i})$. La relación que conecta las coordenadas rectangulares y las coordenadas generalizadas es de la forma

$$x_{\alpha,i} = x_{\alpha,i}(q_j) \quad q_j = q_j(x_{\alpha,i}),$$

expresiones en que se elimina la posibilidad de una dependencia del tiempo, entonces $U = U(q_j)$ y $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$, de esta manera obtenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(T - U)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}.$$

La ecuación (5) puede ser escrita como:

$$T - U - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = -H$$

y usando la ecuación (3), se obtiene:

$$T - U - 2T = -H,$$

$$T + U = E = H = \text{cte.}$$

La energía total E es una constante del movimiento.

La función H es el Hamiltoniano del sistema, el Hamiltoniano es la energía total del sistema si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Las ecuaciones de la transformación que conectan las coordenadas rectangulares y generalizadas, deben ser independientes del tiempo, lo que asegura que la energía cinética sea una función homogénea cuadrática.
2. La energía potencial debe ser independiente de la velocidad que a su vez depende del tiempo.

Es decir que para que la energía sea igual al Hamiltoniano es necesario que éste sea independiente del tiempo.

Conservación del momento lineal

El espacio es homogéneo en un marco de referencia inercial, el Lagrangiano es un sistema cerrado y no se ve afectado por traslaciones en el espacio.

Se considera una traslación infinitesimal de un radio vector \mathbf{r}_α :

$$\mathbf{r}_\alpha \rightarrow \mathbf{r}_\alpha + \delta\mathbf{r}.$$

El sistema se considera como si fuese el de una partícula y se escribirá el Lagrangiano en coordenadas rectangulares:

$$L = L(x_i, \dot{x}_i),$$

el cambio causado por un desplazamiento infinitesimal $\delta\mathbf{r} = \sum_i \delta x_i \mathbf{e}_i$ es:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i = 0$$

$$\delta \dot{x}_i = \delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta x_i = 0.$$

Entonces L se convierte en:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i = 0,$$

cada uno de los δx_i es un desplazamiento independiente, la δL desaparece si cada una de las derivadas de L desaparecen:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0.$$

De acuerdo a las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = \text{cte}$$

ó

$$\begin{aligned} \frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{1}{2} m \sum_j \dot{x}_j^2 \right) \\ &= m \dot{x}_i = \mathbf{p}_i = \text{cte}. \end{aligned}$$

La homogeneidad del espacio implica que el momento lineal \mathbf{p} de un sistema cerrado es constante en el tiempo.

Si el Lagrangiano de un sistema (no necesariamente cerrado) es invariante con respecto a la traslación en cierta dirección, entonces el momento lineal de un sistema es constante en el tiempo.

Conservación del momento angular

Una característica de un marco de referencia inercial es que el sistema cerrado sea isotrópico esto es, que sus propiedades mecánicas no se vean afectadas por la orientación del sistema. Si un sistema es rotado sobre un eje por un ángulo $\delta\theta$ infinitesimal, el radio vector \mathbf{r} cambia a $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ donde:

$$\delta\mathbf{r} = \delta\theta \times \mathbf{r}. \quad (6)$$

La velocidad del vector también cambia:

$$\delta\dot{\mathbf{r}} = \delta\theta \times \dot{\mathbf{r}}. \quad (7)$$

Considerando unicamente una partícula y expresando el Lagrangiano en coordenadas rectangulares:

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right) = 0. \quad (8)$$

Las componentes rectangulares de un momento vector son:

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad \dot{\mathbf{p}}_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}.$$

Entonces la ecuación (8) se puede escribir como:

$$\delta L = \sum_i (\dot{\mathbf{p}}_i \delta x_i + \mathbf{p}_i \delta \dot{x}_i) = 0, \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \delta\dot{\mathbf{r}} = 0.$$

Utilizando las ecuaciones (6) y (7) podemos llegar a:

$$\delta\theta[(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}) + (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p})] = 0$$

una vez más manipulando se obtiene:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{cte.}$$

Hay que recordar que $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = L$; entonces, el momento angular de la partícula en un sistema cerrado es por tanto constante en el tiempo. Algo a destacar es que si se considera un sistema en un campo de fuerza externo (el campo posee un eje de simetría) entonces el Lagrangiano es invariante respecto a rotaciones sobre el eje simétrico.

Hay entonces 7 constantes o integrales de movimiento para un sistema cerrado: Energía total, momento lineal (3 componentes) y momento angular (3 componentes).

Dinámica Hamiltoniana: Ecuaciones canónicas del movimiento.

Un simplectomorfismo es tal que conserva las ecuaciones diferenciales del Hamiltoniano, los simplectomorfismos se llaman ecuaciones canónicas.

Si la energía potencial de un sistema es una velocidad independiente, entonces el momento lineal en coordenadas rectangulares esta dado por

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}.$$

Por analogía se extiende este resultado al caso en que el Lagrangiano esta expresado en coordenadas generalizadas y se define un momento generalizado

$$\mathbf{p}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (10)$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange se expresan como:

$$\dot{\mathbf{p}}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (11)$$

Usando la definición de un momento generalizado, el Hamiltoniano se puede escribir:

$$H = \sum_j \mathbf{p}_j \dot{q}_j - L \quad (12)$$

Entonces, el Lagrangiano es considerado una función de coordenadas generalizadas, velocidades generalizadas y posibilidades en el tiempo. En la ecuación (12) realizamos un cambio de variables desde (q_j, \dot{q}_j, t) a (q_j, \mathbf{p}_j, t) , el Hamiltoniano se puede expresar entonces como:

$$H(q_k, \mathbf{p}_k, t) = \sum_k \mathbf{p}_j \dot{q}_j - L(q_k, \dot{q}_k, t), \quad (13)$$

esta ecuación muestra que el Hamiltoniano es considerado como una función de (q_k, \mathbf{p}_k, t) , mientras que el Lagrangiano es una función de (q_k, \dot{q}_k, t) :

$$H = H(q_k, \mathbf{p}_k, t), \quad L = L(q_k, \dot{q}_k, t).$$

El diferencial total de H es:

$$dH = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_k} d\mathbf{p}_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (14)$$

derivando la ecuación (13) se puede escribir:

$$dH = \sum_k \left(\dot{q}_k d\mathbf{p}_k + \mathbf{p}_k \ddot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

y utilizando las ecuaciones (10) y (11) en la última ecuación y eliminando el segundo y cuarto términos, la expresión se reduce a:

$$dH = \sum_k (\dot{q}_k d\mathbf{p}_k - \dot{\mathbf{p}}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (15)$$

Si identificamos el coeficiente de dq_k , $d\mathbf{p}_k$ y dt en las ecuaciones (14) y (15) encontramos que:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_k}, \quad -\dot{\mathbf{p}}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad (16)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

usando la ecuación (16) en la ecuación (14), el término en el paréntesis desaparece y se sigue que:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (17)$$

Las ecuaciones (16) son las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Por su apariencia simétrica son conocidas como ecuaciones canónicas del movimiento. La ecuación (17) expresa que si H no

depende explícitamente del tiempo, entonces es una cantidad que se conserva.

Existen $2s$ ecuaciones canónicas que reemplazan las ecuaciones de Lagrange, estas son ecuaciones diferenciables de primer orden, mientras que las ecuaciones de Lagrange son de segundo orden.

Para poder utilizar las ecuaciones canónicas primero se debe construir el Hamiltoniano como una función del momento y de las coordenadas generalizadas; en algunos casos será posible, mientras que en otros más complicados será necesario calcular el Lagrangiano y entonces calcular el momento generalizado de acuerdo a la ecuación (10).

Las ecuaciones de movimiento son dadas por las ecuaciones canónicas, para ahondar más en el tema se puede consultar [1].

Utilizando el Hamiltoniano se tiene gran libertad para elegir la variable a utilizar, que se traduce en una ventaja pues q_k y \mathbf{p}_k son independientes, mientras que q_k y \dot{q}_k no lo son. La mecánica hamiltoniana provee una base en su método que se puede extender a otros campos del conocimiento.

La coordenada canónica q_k y el momento canónico \mathbf{p}_k son cantidades canónicas conjugadas. De acuerdo a las ecuaciones (16) si q_k no aparece en el Hamiltoniano, entonces $\dot{\mathbf{p}}_k = 0$ y el momento conjugado \mathbf{p}_k es una constante del movimiento.

Las coordenadas que no aparecen explícitamente en las expresiones para T y U se dice que son cíclicas. Una coordenada cíclica en H se dice que también es cíclica en L , pero si q_k no aparece en L , \dot{q}_k aún se mantiene presente.

Así:

$$L = L(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t),$$

en donde aún hay s ecuaciones de segundo orden no resueltas, sin embargo en una formulación canónica si q_k es cíclica, \mathbf{p}_k es una constante $\mathbf{p}_k = \alpha_k$, entonces:

$$H = H(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_s, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{k-1}, \alpha_k, \mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_s, t)$$

tendremos $2s - 2$ ecuaciones de primer orden para ser resueltas y el problema se ha reducido en

complejidad. Si la coordenada q_k es ignorable, entonces se calcula la constante α_k , aplicando las condiciones iniciales, la ecuación de movimiento para la coordenada cíclica es:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial \alpha_k} = w_k,$$

que al ser integrada:

$$q_k(t) = \int w_k dt.$$

La solución para una coordenada cíclica es trivial para reducir su cuadratura.

La formulación canónica de Hamilton es ideal para lidiar con problemas en las que una o más coordenadas son cíclicas, se podría encontrar fácilmente una solución a algún problema si todas sus coordenadas fuesen cíclicas, este procedimiento permite una formulación de la dinámica particularmente útil en la construcción de teorías modernas.

Conclusiones

La geometría simpléctica es considerada una rama de las matemáticas, hace su aparición en la física en diferentes teorías por mencionar algunas cómo la mecánica cuántica, la termodinámica, teorías del caos, y mecánica hamiltoniana, está última utiliza las transformaciones simplécticas que conservan cantidades físicas, el Hamiltoniano es una función que conservará la energía de un sistema siempre que este sistema sea independiente del tiempo.

Referencias

- [1] MCDUFF, D. Introduction to symplectic topology. In *Symplectic geometry and topology (Park City, UT, 1997)*, vol. 7 of *IAS/Park City Math. Ser.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 5–33.
- [2] THORNTON, M. *Classical Dynamics of particles and systems*. Thomson, Brooks cole.
- [3] VELASCO, E. Mecánica lagrangiana y hamiltoniana.