Construcción de funciones hamiltonianas a partir de variedades

Gonzalo Rodríguez Rebolledo[1]

[1]Universidad Veracruzana, Licenciatura en Matemáticas, Gonzalo_ror@hotmail.com

*Verano de Investigación 2017

Abstract

Una variedad tórica es un tipo especial de variedad en la que existe una biyección entre las variedades tóricas y los politopos de Delzant, dicha función recibe como nombre función momento. De hecho, para construir esta función se utilizan las funciones hamiltonianas, que van de la variedad a $\mathbb{R}$. La construcción de dichas funciones es importante porque son las que determinan la forma de la biyección.

A lo largo de este proyecto se estudian las acciones en las variedades tóricas, que son en sí mismas una forma de estudio de las variedades puesto que cada acción define un campo vectorial en la variedad lo que ayuda a comprender cómo son tanto las varidades como las funciones hamiltonianas respecto a ellas además, con estas se construyen las funciones hamiltonianas.

Introducción

El proposito de este documento es entender cómo se construyen funciónes hamiltonianas H a partir de acciones de grupo en las variedades con conocimientos mínimos de topología y de geometría diferencial. Se utilizarán maneras intuitivas para ver la parte topológica y se usarán ejemplos como base para desarrollar la teoría.

La construcción de las funciones hamiltonianas se dividirá en dos partes: la primera es construir un campo vectorial a partir de una variedad tórica M, para esto se usarán acciónes de grupos de Lie que dan lugar a campos vectoriales en M cuyos vectores son tangentes a las orbitas de la acción. Además, se dará una definición equivalente para las acciones de un grupo de Lie en la que estas son homomorfismos entre el grupo y los difeomorfismos de M, de este modo se pueden estudiar a las variedades tóricas únicamente con las acciones de grupo.

La segunda es que dado un campo vectorial en M determinar si existe una función hamiltoniana asociada a este, por lo que se da la condición para que una función este asociada a un campo vectorial, aunque esto no asegura que dicha función sea hamiltoniana. Para esto se verá que la forma de las variedades determina la forma de las funciones hamiltonianas, lo cuál sirve como criterio para saber si la función asociada al campo, en caso de existir, es hamiltoniana.

1 Preliminares

Para la lectura de este documento, es necesario tener conocimientos basicos de álgebra lineal, teoría de grupos, cálculo diferencial en una variable, y geometría simplectica, en particular se deben conocer las siguientes definiciones y resultados.

Definición 1.1. La **delta de Kronecker** es una función de dos variables definida como sigue

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

1.1 Teoría de Grupos

Definición 1.2. [3] Sean $(G, *)$ y $(H, \cdot)$ dos grupos, entonces $f : G \mapsto H$ es un **homomorfismo** si se cumple que

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$$

para toda $x, y \in G$.

Definición 1.3. [3] Sean G un grupo y X un conjunto cualquiera, entonces G **actua** sobre X si existe una función $\psi : G \times X \mapsto X$ tal que

i. $\psi(gh, x) = \psi(g, \psi(h, x))$

ii. $\psi(1, x) = x$

para toda $g, h \in G$ y para toda $x \in X$, siendo 1 el elemento neutro de G. Tomando a $\psi(g, x) = g \cdot x$ las condiciones se traducen a

i. $(gh)x = g(hx)$

ii. $1 \cdot x = x$.

Definición 1.4. [3] Sean G un grupo y X un conjunto, si G actua en X entonces la **orbita** de $x \in X$, denotada por $O(x)$ es

$$O(x) = \{gx | g \in G\} \subset X.$$

Definición 1.5. Sea $U \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, entonces U es una **matriz unitaria** si $U^*U = \mathbb{1}$ donde U^* es la matriz conjugada transpuesta de U es decir, que U preserva el producto escalar. El **grupo de matrices unitarias** de $n \times n$ se denota por $\mathrm{U}(n)$.

1.2 Álgebra Lineal

Definición 1.6. [2] Un **espacio vectorial simpléctico** es un par (V, ω) donde V es un espacio vectorial de dimensión finita y $\omega : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ es una forma bilinear antisimétrica no degenerada es decir, ω safisface las siguientes condiciones:

i. Antisimétrica. Para todo $u, v \in V$

$$\omega(u, v) = -\omega(v, u)$$

ii. No degenerada. Dado $u \in V$ existe $v \in V$ tal que

$$\omega(u, v) \neq 0$$

Si ω es una forma bilinear antisimétrica no degenerada, entonces se dice que ω es una **forma simpléctica**.

Nota: El espacio vectorial V es necesariamente de dimensión par ya que una matriz antisimétrica con entradas reales siempre tiene un kernel distinto de 0. El ejemplo estandar de un espacio vectorial simpléctico es el espacio euclideano $\mathbb{R}^{2n}$ con su forma simpléctica

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

donde

$$dx_i \wedge dy_i(u, v) = dx_i(u)dy_i(v) - dy_i(u)dx_i(v)$$

siendo dx_i, dy_j funciones lineales tales que, tomando la base canónica $B = \{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n}\}$, se tiene que

$$dx_i = \begin{cases} x_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij} & \text{para todo } i, j \\ x_i(\frac{\partial}{\partial y_j}) = 0 & \text{para todo } i, j \end{cases}$$

con las funciones dy_i definidas de manera análoga.

Teorema 1.1. *Sea (V, ω) un espacio vectorial simpléctico, entonces existe una base $B = \{e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_n\}$ tal que*

$$\begin{array}{rclr} \omega(e_i, e_j) & = & 0 & \text{para todo } i, j \\ \omega(f_i, f_j) & = & 0 & \text{para todo } i, j \\ \omega(e_i, f_j) & = & \delta_{ij} & \text{para todo } i, j \end{array}$$

esta base se llama base simpléctica y la representación matricial de ω con respecto a esta base es

$$\omega(u, v) = u^T J_0 v$$

donde $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$.

1.3 Geometría simpléctica

Definición 1.7. Sean M y N dos variedades, entonces $f : M \mapsto N$ es un **difeomorfismo** si f es un isomorfismo y tanto f como su inversa f^{-1} son diferenciables. Se denotará por $\mathrm{Diff}(M)$ al grupo de difeomorfismos de M con ella misma.

Definición 1.8. [1] Sea M una variedad, si M esta equipada con una forma simpléctica ω, al par (M, ω) se le llama **variedad simpléctica**.

Definición 1.9. Sea (M, ω) una variedad simpléctica, entonces una **función hamiltoniana** H es una función cuyo dominio es M y contradominio $\mathbb{R}$ es decir $H : M \mapsto \mathbb{R}$.

Definición 1.10. Sea M una variedad con $\dim M = 2n$, un **campo vectorial** X en M es una función tal que $X : M \mapsto M$, al que a cada punto de M le asigna un vector, la forma estandar de un campo vectorial es

$$X = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} + u_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + u_n \frac{\partial}{\partial y_n}$$

en donde v_i, u_j son funciones en M.

2 Acciones de grupos

Para iniciar el estudio de las acciones de grupos y las funciones hamiltonianas, es necesario tener una noción acerca de lo que es una variedad tórica por lo que se dará una idea intuitiva de que son y que propiedades debe tener por medio de algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1. La esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

En este caso se pensará a S^2 como los vectores unitarios en $\mathbb{R}^3$, note que a cada punto p de la esfera se le puede asignar un plano tangente por lo que la forma simpléctica de S^2 es inducida por el producto interno y externo:

$$\omega_p(u, v) := \langle p, u \times v \rangle.$$

Ejemplo 2.2. El toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

Al igual que la esfera, a cada punto del toro se le pueden asignar vectores tangentes, esta propiedad es debido a que la figura geometría en cuestión no tiene “bordes”, los puntos del toro al ser el producto de dos circunferencias se pueden definir mediante la rotación de dos angulos θ_1, θ_2 con lo que su forma simpléctica es

$$\omega(u, v) = d\theta_1 \wedge d\theta_2.$$

De este modo, al referirse a una variedad torica, se debe pensar en un objeto geometrico cuyos bordes son suaves y este es de una sola pieza, esto es, que no esta dividido en secciones como un hiperboloide de dos hojas.

2.1 Grupos de Lie

Enfocándose en la primera parte de la construcción de las funciones se estudiarán a los grupos de Lie, a partir de los cuales se construyen los campos vectoriales asociados a las variedades toricas.

Definición 2.1. [1] Un **grupo de Lie** es una variedad G equipada con una estructura de grupo donde las operaciones

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \mapsto & G \\ (a,b) & \mapsto & a \cdot b \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{c} G \mapsto G \\ a \mapsto a^{-1} \end{array}$$

son continuas y suaves (diferenciables).

La condición de que las operaciones de grupo sean diferenciables es para asegurar que los pasos necesarios en la construcción del campo vectorial que se darán más adelante tengan sentido. Los siguientes ejemplos se usarán para entender mejor cómo son los grupos de Lie.

Ejemplo 2.3. Sean (V, ω) un espacio vectorial simpléctico y $\psi \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$, entonces ψ es una **matriz simpléctica** si

$$\psi \cdot \omega(u, v) := \omega(\psi u, \psi v) = \omega(u, v)$$

esto es, que ψ preserva la estructura simpléctica. Se denotará por $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ al **grupo de matrices simplécticas** de (V, ω), para la variedad estandar se abreviará $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) = \mathrm{Sp}(2n)$.

Proposición 2.1. *Sea* $X \in M_{2n \times 2n}$ *entonces* $X \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$ *si y solo si* $X^T J_0 X = J_0$.

Demostración:

Sea $X \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R})$ entonces

1. Suponga que $X \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$, así

$$\begin{aligned} \omega(Xu, Xv) &= \omega(u, v) \\ (Xu)^T J_0 X v &= u^T J_0 v \\ u^T X^T J_0 X v &= u^T J_0 v \end{aligned}$$

de donde $X^T J_0 X = J_0$.

2. Analogamente, si $X^T J_0 X = J_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \omega(Xu, Xv) &= (Xu)^T J_0 X u \\ &= u^T X^T J_0 X u \\ &= u^T J_0 u \\ &= \omega(u, v). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.2. $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ *es un grupo con la multiplicación de matrices usual.*

Demostración:

1. Sean $X, Y \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$, entonces

$$\begin{aligned} \omega(XYu, XYv) &= (XYu)^T J_0 XYv \\ &= u^T Y^T X^T J_0 XYv \\ &= u^T Y^T J_0 Y v \\ &= u^T J_0 v \\ &= \omega(u, v) \end{aligned}$$

por lo que $XY \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$.

2. Sea $X \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$, de este modo

$$\begin{aligned} \omega(X^{-1}u, X^{-1}v) &= (X^{-1}u)^T J_0 X^{-1} v \\ &= u^T (X^{-1})^T J_0 X^{-1} v \\ &= u^T (X^{-1})^T (X^T J_0 X) X^{-1} v \\ &= u^T ((X^T)^{-1} X^T) J_0 (X X^{-1}) v \\ &= u^T J_0 v \\ &= \omega(u, v) \end{aligned}$$

y así $X^{-1} \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$.

Por lo tanto $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ es un grupo con la multiplicación de matrices usual.

$\square$

Para poder visualizar mejor la forma de las matrices simplécticas, se verán una serie de condiciones que estas cumplen en función de una partición dada, además de dar de manera explicita la forma de sus inversas.

Proposición 2.3. *Sea $X \in \mathrm{Sp}(V, \omega)$, si $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ con $A, B, C, D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ entonces se cumple lo siguiente*

i. $A^TC = (A^TC)^T$.

ii. $B^TD = (B^TD)^T$.

iii. $A^TD - C^TB = \mathbb{1}$.

iv. $X^{-1} = J_0^{-1}X^TJ_0 = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}$

Demostración:

Sea $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ una matriz simpléctica, entonces

$$\begin{aligned} J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} &= X^TJ_0X \\ &= \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^TC - C^TA & A^TD - C^TB \\ B^TC - D^TA & B^TD - D^TB \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} A^TC - C^TA &= 0 \\ B^TD - D^TB &= 0 \\ A^TD - C^TB &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

de las primeras dos ecuaciones se deducen i y ii y la tercera ecuación es precisamente la condición iii. Por otro lado recordemos que $X^TJ_0X = J_0$, multiplicando por J_0^{-1} por la izquierda se tiene que

$$J_0^{-1}X^TJ_0X = \mathbb{1}$$

de donde

$$\begin{aligned} X^{-1} &= J_0^{-1}X^TJ_0 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^T & D^T \\ -A^T & -C^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con lo que se cumple iv.

$\square$

Ejemplo 2.4. Sea $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, entonces X es **ortogonal** si y solo si $X^TX = \mathbb{1}$ y se denota por $\mathrm{O}(n)$ al **grupo de matrices ortogonales** de $n \times n$. Además si $\det X = 1$ se dice que X es **ortogonal especial** y se detona al **grupo de matrices ortogonales especiales** por $\mathrm{SO}(n)$.

Es evidente ver que los conjuntos $\mathrm{O}(n)$ y $\mathrm{SO}(n)$ son grupos, ya que si $X, Y \in \mathrm{O}(n)$ entonces

$$\begin{aligned}(XY)^T XY &= Y^T X^T XY \\ &= Y^T Y \\ &= \mathbb{1}\end{aligned}$$

por lo que $XY \in \mathrm{O}(n)$ y si, además, $X, Y \in \mathrm{SO}(n)$ entonces

$$\det XY = \det X \det Y = 1 \cdot 1 = 1$$

así, $XY \in \mathrm{SO}(n)$ y se concluye que $\mathrm{O}(n)$ y $\mathrm{SO}(n)$ son ambos grupos con $\mathrm{SO}(n)$ siendo subgrupo de $\mathrm{O}(n)$. A continuación se dará una manera explicita de escribir a las matrices del grupo $\mathrm{O}(n)$ en función de sus vectores fila.

Proposición 2.4. *Sea $X \in \mathrm{O}(n)$, si $X = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ con $v_i = (x_{i1}, .., x_{in})$ entonces los vectores son ortogonales entre si con $\|v_i\| = 1$, es decir dados v_i, v_j se cumple que $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$.*

Demostración:

Sea $X \in \mathrm{O}(n)$, si $X = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{1} &= XX^T \\ &= \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T & \cdots & v_n^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 v_1^T & v_1 v_2^T & \cdots & v_1 v_n^T \\ v_2 v_1^T & v_2 v_2^T & \cdots & v_2 v_n^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n v_1^T & v_n v_2^T & \cdots & v_n v_n^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & \cdots & v_1 \cdot v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n \cdot v_1 & \cdots & v_n \cdot v_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

de este modo $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}$ y por lo tanto los vectores son ortogonales entre si con $\|v_i\| = 1$.

$\square$

Ejemplo 2.5. El **grupo lineal general**, que es el grupo de matrices invertibles de $n \times n$ con entradas reales denotado por $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{X \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) | X \text{ es invertible}\}$.

El grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ es un subgrupo de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ bajo la identificación de $\mathbb{R}^{2n}$ con $\mathbb{C}^n$ en su forma matricial con $z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, donde $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$. De esta forma, la multiplicación por J_0 en $\mathbb{R}^{2n}$ corresponde a la multiplicación por i en $\mathbb{C}^n$ y además, el grupo de matrices unitarias $\mathrm{U}(n)$ se puede ver como las matrices $X \in M_{2n \times 2n}$ con $X = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ tales que

$$A^T B = B^T A \qquad \text{y} \qquad A^T A + B^T B = \mathbb{1}.$$

El siguiente resultado muestra la estrecha relación que existe entre los grupos $\mathrm{O}(2n)$, $\mathrm{Sp}(2n)$ y $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Lemma 2.1.

$$\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n) = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{U}(n)$$

Demostración:

Sea $X \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$, entonces se satisfacen las siguientes tres identidades:

$$\begin{array}{ccc} X \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) & \Leftrightarrow & XJ_0 = J_0X \\ X \in \mathrm{Sp}(2n) & \Leftrightarrow & X^TJ_0X = J_0 \\ X \in \mathrm{O}(2n) & \Leftrightarrow & X^TX = \mathbb{1} \end{array} \quad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Se verá que cualesquiera de estas dos condiciones implican la tercera.
1. Suponga que X cumple (1) y (2), entonces

$$\begin{aligned} J_0 &= X^TJ_0X \\ &= X^TXJ_0 \end{aligned}$$

por lo tanto $X^TX = \mathbb{1}$, con lo que se cumple (3).

2. Suponga que X cumple (2) y (3), entonces

$$\begin{aligned} J_0X &= \mathbb{1}J_0X \\ &= XX^TJ_0X \\ &= XJ_0 \end{aligned}$$

por lo que se cumple (1).

3. Suponga que X cumple (1) y (3), entonces

$$\begin{aligned} X^TJ_0X &= X^TXJ_0 \\ &= \mathbb{1}J_0 \\ &= J_0 \end{aligned}$$

y así, se cumple (2).

De este modo, basta verificar que $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n) = \mathrm{U}(n)$.

1. Supongase que $X \in \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$, entonces

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad X^{-1} = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$$

por lo que $A = D$ y $B = -C$ de este modo $X = \begin{pmatrix} A & -C \\ C & A \end{pmatrix}$, además

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= X^TX \\ &= \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -C \\ C & A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^TA + C^TC & -A^TC + C^TA \\ C^TA - A^TC & A^TA + C^TC \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de donde $A^TB = B^TA$ y $A^TA + B^TB = \mathbb{1}$ y por lo tanto $X \in \mathrm{U}(n)$.

2. Supongase que $X \in \mathrm{U}(n)$ entonces si $X = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ con $X = A + Bi$ se sigue que

$$\begin{aligned} X^TX &= \begin{pmatrix} A^T & B^T \\ -B^T & A^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^TA + B^TB & -A^TB + B^TA \\ -B^TA + A^TB & A^TA + B^TB \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo que $X \in \mathrm{O}(2n)$, además

$$\begin{aligned} X^T J_0 X &= \begin{pmatrix} A^T & B^T \\ -B^T & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^T & B^T \\ -B^T & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B & -A \\ A & -B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -A^T B + B^T A & -A^T A - B^T B \\ B^T B + A^T A & -B^T A + A^T B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

así $X \in \mathrm{Sp}(2n)$ y por lo tanto $X \in \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n)$.

□

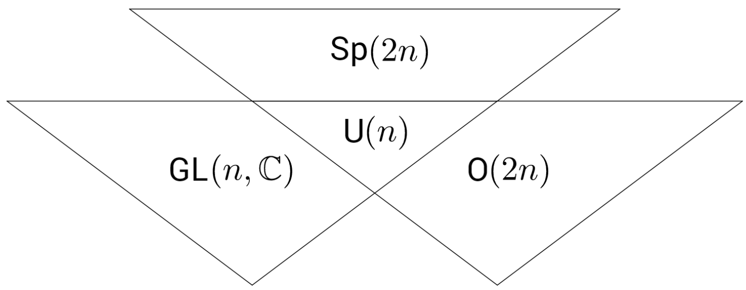

Figura 1: Intersección de $\mathrm{O}(2n)$, $\mathrm{Sp}(2n)$ y $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

2.2 Campos vectoriales

Sea M una variedad tórica entonces cada acción de $\mathbb{R}$ en M es definida por un campo vectorial en M, analogamente cada campo vectorial en M define a una acción de $\mathbb{R}$ en M, por lo que existe una correspondencia 1-1 entre los campos vectoriales en M y las acciones de $\mathbb{R}$ en M.

Para la construcción de las funciones hamiltonianas, nos enfocaremos en la construcción de la primera parte, esto es que cada acción de $\mathbb{R}$ en M es definida por un campo vectorial en M.

Construcción de un campo vectorial X a partir de una acción de grupo

Sean M una variedad tórica y $\psi : \mathbb{R} \times M \mapsto M$ una acción de $\mathbb{R}$ en M, entonces se fija al elemento de la variedad en $p \in M$ para obtener $C_p : \mathbb{R} \mapsto M$ con

$$C_p(t) = \psi(t, p)$$

se afirma que

$$X_p = \left.\frac{dC_p(t)}{dt}\right|_{t=1}$$

es un campo vectorial en M. Para visualizar esta propiedad se usará $M = \mathbb{R}^n$, entonces C_p es una curva de $\mathbb{R}^n$ que pasa por p y que corresponde a la orbita $O(p)$ de la acción ψ, entonces

$$\left.\frac{dC_p(t)}{dt}\right|_{t=1} = \frac{dC_p(1)}{dt} = \frac{d\psi(1, p)}{dt}$$

corresponde a los vectores tangentes a la curva C_p en el punto p ya que $C_p(1) = \psi(1, p) = 1 \cdot p = p$ (note que se evalua en 1 ya que el grupo en el que se trabaja es $\mathbb{R}$, en caso de que el grupo sea distinto, C_p se evaluará en el elemento neutro del grupo).

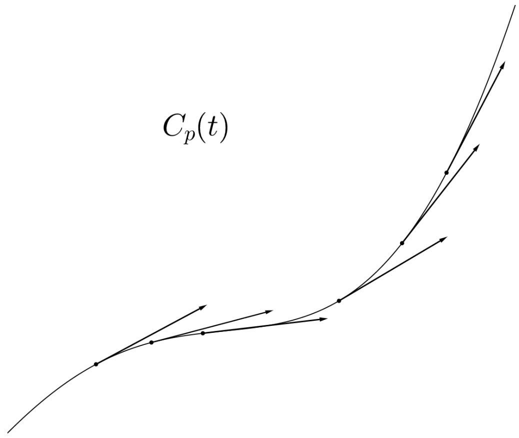

Figura 2: Curva C_p con sus vectores tangentes

De este modo, haciendo variar p, se tendrá el campo vectorial X cuyos vectores son tangentes a las curvas generadas por las orbitas de la acción ψ. El evaluar a C_p en 1 es para asegurar que el campo vectorial está siendo evaluado en $x \in M$, ya que de otro modo se estaría evaluando en $t \cdot x$.

Con el fin de aclarar este proceso, se verán ejemplos de la construcción de campos vectoriales a partir de acciones de grupos de Lie.

Ejemplo 2.6. Contrucción de un campo vectorial a partir de la acción de $SO(2)$ sobre $\mathbb{R}^2$.

Considere al grupo $SO(2) := \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | X^T X = \mathbb{1}, \det(X) = 1\}$ (Grupo de matrices ortogonales especiales de 2×2). Para facilitar la acción de $SO(2)$ en $\mathbb{R}^2$ primero veremos que en este caso particular, se pueden expresar a las matrices de $SO(2)$ como sigue.

Proposición 2.5. *Sea $X \in SO(2)$, entonces X puede escribirse de la siguiente manera.*

$$X = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{con } \theta \in \mathbb{R}$$

Demostración:

Suponga que $X \in SO(2)$, si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces como X ortogonal

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 & (4) \\ c^2 + d^2 &= 1 & (5) \\ ac + bd &= 0 & (6) \end{aligned}$$

de las ecuaciones (4) y (5) se tiene que

$$-1 \leq a \leq 1 \qquad \text{y} \qquad -1 \leq d \leq 1$$

por lo tanto existen $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tales que $a = \cos\theta_1$ y $d = \cos\theta_2$, de este modo

$$\begin{aligned} b^2 &= 1 - a^2 \\ &= 1 - \cos^2\theta_1 \\ &= \operatorname{sen}^2\theta_1 \end{aligned}$$

analogamente para c se cumple que $c^2 = \operatorname{sen}^2\theta_2$. Sustituyendo en X se tiene

$$X = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \pm\operatorname{sen}\theta_1 \\ \pm\operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

Caso 1. b y c tienen el mismo signo. Sin perdida de generalidad supongamos que ambos son positivos, es decir $b = \operatorname{sen}\theta_1$ y $c = \operatorname{sen}\theta_2$, entonces por (6)

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + \cos\theta_2 \operatorname{sen}\theta_1 &= 0 \\ \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 &= k\pi && k \in \mathbb{Z} \\ \theta_1 &= -\theta_2 + k\pi \end{aligned}$$

Caso 1.1 $k = 2p + 1$ (k es impar). Sustituyendo en X

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta_2 + (2p+1)\pi) & \operatorname{sen}(-\theta_2 + (2p+1)\pi) \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta_2 + \pi) & \operatorname{sen}(-\theta_2 + \pi) \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos\theta_2 & \operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pero $\det(X) = -\cos^2\theta_2 - \operatorname{sen}^2\theta_2 = -1$ por lo que $X \notin \mathrm{SO}(2)$.

Caso 1.2 $k = 2p$ (k es par). Sustituyendo en X

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta_2 + 2p\pi) & \operatorname{sen}(-\theta_2 + 2p\pi) \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

además, $\det(X) = \operatorname{sen}^2\theta_2 + \cos^2\theta_2 = 1$, por lo que $X \in \mathrm{SO}(2)$.

Caso 2. b y c tienen signo diferente. Sin perdida de generalidad supongamos que b es negativo, es decir $b = -\operatorname{sen}\theta_1$ y $c = \operatorname{sen}\theta_2$, entonces por (6)

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 &= 0 \\ \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) &= 0 \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} \theta_1 - \theta_2 &= k\pi && k \in \mathbb{Z} \\ \theta_1 &= \theta_2 + k\pi \end{aligned}$$

Caso 2.1 $k = 2p + 1$ (k es impar). Sustituyendo en X

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_2 + (2p+1)\pi) & -\operatorname{sen}(\theta_2 + (2p+1)\pi) \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_2 + \pi) & -\operatorname{sen}(\theta_2 + \pi) \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos\theta_2 & \operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pero $\det(X) = -\operatorname{sen}^2\theta_2 - \cos^2\theta_2 = -1$, por lo que $X \notin \mathrm{SO}(2)$.

Caso 2.2 $k = 2p$ (k es par). Sustituyendo en X

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_2 + 2p\pi) & -\operatorname{sen}(\theta_2 + 2p\pi) \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

además $\det(X) = \operatorname{sen}^2\theta_2 + \cos^2\theta_2 = 1$, por lo que $X \in \mathrm{SO}(2)$.

$\square$

De este modo SO(2) se puede ver como $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ ya que variar θ en SO(2) corresponde a mover un punto del plano por su circunferencia anclada al origen, así, se define la acción $\psi : \mathrm{SO}(2) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante

$$\begin{aligned} \psi(\theta, v) &= X_\theta v \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

note que al igual que S^1, las orbitas de SO(2) estan compuestas por circunferencias de centro en el origen. Fijando a los elementos de R^2 en $v = p = (x_0, y_0)$ se tiene que

$$C_p(\theta) = \psi(\theta, p) = (x_0\cos\theta - y_0\operatorname{sen}\theta, x_0\operatorname{sen}\theta + y_0\cos\theta)$$

luego,

$$\frac{dC_p(\theta)}{d\theta} = (-x_0\operatorname{sen}\theta - y_0\cos\theta, x_0\cos\theta - y_0\operatorname{sen}\theta)$$

Nota: A diferencia de $\mathbb{R}$, el elemento neutro de SO(2) es la matriz identidad, por lo que se evaluará a $\frac{dC_p(t)}{dt}$ en 0, así

$$\frac{dC_p(0)}{dt} = (-x_0\operatorname{sen}(0) - y_0\cos(0), x_0\cos(0) - y_0\operatorname{sen}(0)) = (-y_0, x_0)$$

finalmente se obtiene el campo vectorial X haciendo variar a p en $\mathbb{R}^2$.

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

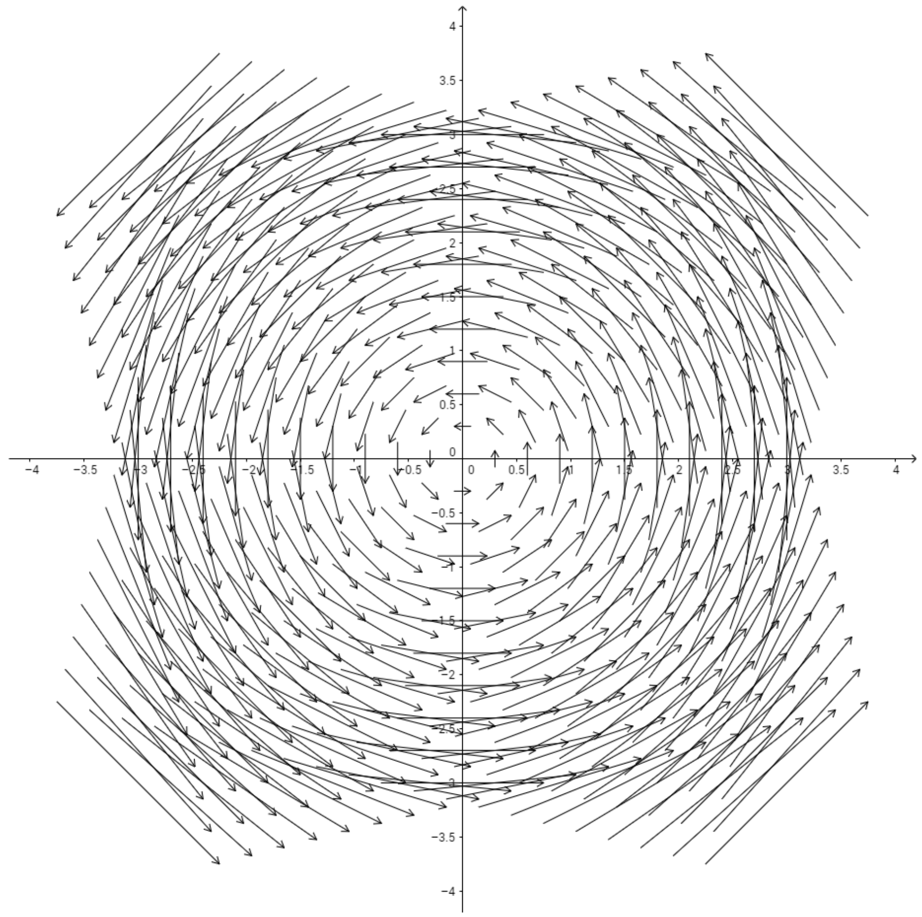

Figura 3: Campo vectorial $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ con vectores escalados a 1:4

Como se había dicho anteriormente, los grupos SO(2) y S^1 se comportan del mismo modo, es por eso que el campo vectorial asociado a la acción, esta compuesto de vectores tangentes a las orbitas de S^1.

Ejemplo 2.7. Construcción de un campo vectorial a partir de la acción de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$.

Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una acción con

$$\psi(t,x) = (x_1 + t, x_2, ..., x_n)$$

entonces, fijando a x en $p = (p_1, ..., p_n)$ se tiene que

$$C_p = \psi(t,p) = (p_1 + t, p_2, ..., p_n)$$

derivando respecto a t se obtiene

$$\frac{dC_p}{dt} = (1, 0, ..., 0)$$

luego, haciendo variar a p obtenemos

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

en donde las orbitas de X son lineas paralelas al eje x_1. En este caso los vectores de X son constantes debido a que $\frac{dC_p(t)}{dt}$ es constante también.

2.3 Funciones Hamiltonianas

Dado un campo vectorial X, la primera pregunta que surge en el estudio de variedades tóricas es si este esta asociado o no a una función hamiltoniana, para responder a esta pregunta, empecemos por analizar las condiciones que necesita cumplir X para que esto ocurra.

Definición 2.2. [1] Sea X un campo vectorial, entonces decimos que X es un **campo vectorial hamiltoniano** si existe una función hamiltoniana H tal que

$$\omega(X,\cdot) = dH := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i}dx_i + \frac{\partial H}{\partial y_i}dy_i$$

en cuyo caso se dice que X esta asociado a H.

Nota: la representación matricial de dH es ∇H.

Dada una función hamiltoniana H, siempre existirá un campo vectorial X tal que $\omega(X, \cdot) = dH$, ya que

$$\begin{aligned} \omega(X, \cdot) &= dH \\ J_0 X &= \nabla H \end{aligned}$$

de donde $X = -J_0 \nabla H$, pero dado un campo vectorial X, este no siempre tendrá una función hamiltoniana asociada.

Ejemplo 2.8. En el Ejemplo 2.6 se vio el campo vectorial asociado a la acción de SO(2) en $\mathbb{R}^2$, para concluir la construcción de la función hamiltoniana, se tomará a

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

(el negativo de X en el Ejemplo 2.6) y se determinará si X es o no hamiltoniano y en caso de serlo, a que función hamiltoniana esta asociado.

Para esto supongamos que X tiene asociada a una función H, es decir

$$\begin{aligned} \omega(X, \cdot) &= dH \\ dx \wedge dy(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \cdot) &= \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy \\ ydy + xdx &= \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy \end{aligned}$$

Igualando los terminos en dx y dy

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = y$$

entonces, integrando con respecto a x a la primera derivada parcial se tiene que

$$H(x, y) = \frac{x^2}{2} + f(y)$$

luego, derivando respecto a y se obtiene

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \dot{f}(y) = y$$

de donde

$$f(y) = \frac{y^2}{2} + c$$

y por lo tanto la función hamiltoniana asociada a X es

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Ejemplo 2.9. Acción no hamiltoniana de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{T}^2$

Para este ejemplo, usaremos la identificación de $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ de la siguiente manera, sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces se define la relación $(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2)$ si y solo si

$$x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \qquad \text{y} \qquad y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$$

en cuyo caso se dice que $[x_1, y_1] = [x_2, y_2]$ y denotamos a $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ por $[x, y]$. Es claro que esta partición de $\mathbb{R}^2$ es una relación de equivalencia en donde sus clases de equivalencia son números con la misma parte decimal, por lo que $\mathbb{T}^2$ se puede ver como bloques de longitud 1 en el plano.

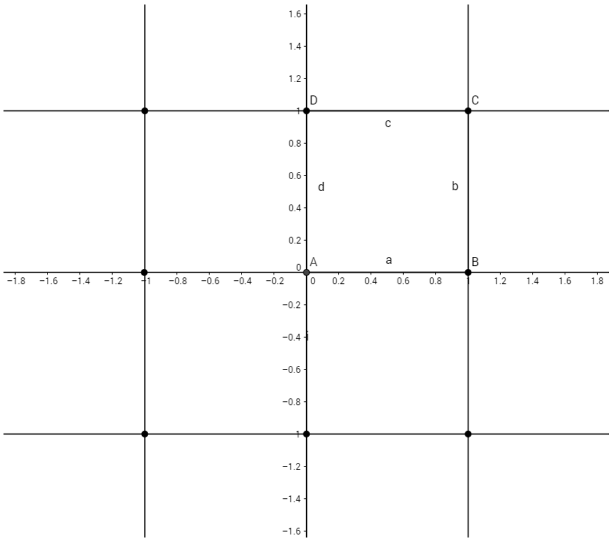

Figura 4: Representación grafica de $\mathbb{T}^2$

Donde los lados a y b son iguales a c y d respectivamente, y los puntos A, B, C, D son el mismo. Una consecuencia directa de esta representación es que si una función f actua sobre $\mathbb{T}^2$ entonces se cumple que

$$f(x, y) = f(x + m, y + n)$$

con $m, n \in \mathbb{Z}^2$.
Sea $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ una acción con

$$\psi(t, v) = \psi(t, (x, y)) = (x + t, y)$$

Entonces, fijamos a v en $p = (x_0, y_0)$ con lo que

$$C_p(t) = \psi(t, p) = (x_0 + t, y_0)$$

derivando respecto a t y evaluando en 1 se tiene que

$$\frac{dC_p(t)}{dt} = \frac{dC_p(1)}{dt} = (1, 0)$$

finalmente haciendo variar a p, el campo vectorial asociado a la acción es

$$X = \frac{\partial}{\partial x}$$

supongamos que X es un campo vectorial hamiltoniano, esto es que

$$\begin{aligned} \omega(X, \cdot) &= dH \\ \omega(\frac{\partial}{\partial x}, \cdot) &= \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy \\ -dy &= \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy \end{aligned}$$

de donde se tiene

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = -1$$

integrando la parcial respecto a y de H se obtiene

$$H(x, y) = -y + \dot{f}(x)$$

luego, derivando respecto a x

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{f}(x) = 0$$

Así $f(x) = c$ y por lo tanto

$$H(x, y) = -y$$

pero

$$H(x,y) \neq H(x,y+n)$$

para $n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$ y por lo tanto H no actua sobre $\mathbb{T}^2$.

A pesar de que la función H es muy parecida a la del Ejemplo 2.8, esta resulto no ser hamiltoniana y esto se debe a que las funciones actuan en variedades distintas, para ser precisos, a diferencia del Ejemplo 2.8 la variedad $\mathbb{T}^2$ bajo la identificación dada es periodica, por lo que las funciones que actuan en ella también deben serlo.

Así, a pesar de que X puede tener asociada a una función esto no garantiza que sea hamiltoniana, a continuación se verá una manera más general de determinar si la función asociada a un campo vectorial es hamiltoniana.

Lemma 2.2. *Sean M una variedad tórica y $f : M \to \mathbb{R}$ una función continua y diferenciable, entonces $\nabla f(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in M$.*

Demostración:

Para poder analizar esta propiedad, se usará a $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ continua y diferenciable. Como f es continua en un intervalo cerrado, entonces f esta acotada superior e inferiormente, esto es, f alcanza su mínimo y su máximo. Por otro lado, al ser f difenciable, f tiene puntos críticos en su mínimo y máximo, por lo que

$$f'(x_0) = 0$$

para algún $x_0 \in (a,b)$.

$\square$

Teorema 2.1. *Sean M una variedad tórica y X un campo vectorial de M, si $X \neq 0$ para todo $x \in M$ entonces X no es hamiltoniano.*

Demostración:

Sea M una variedad tórica y X un campo vectorial de M, supóngase que $X \neq 0$ para todo $x \in M$ entonces

$$\omega(X,\cdot) = J_0 X \neq 0$$

Para toda $x \in M$, ahora, si suponemos que $\omega(X,\cdot) = dH$ para algún $H : M \to \mathbb{R}$ entonces

$$\nabla H = J_0 X \neq 0$$

para todo $x \in M$ pero por el lema anterior, existe x_0 tal que $\nabla H(x_0) = 0$, esto es una contradicción. Por lo tanto, no existe $H : M \to \mathbb{R}$ tal que $\omega(X,\cdot) = dH$.

$\square$

Ejemplo 2.10. Función hamiltoniana $H : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$.

Sea $H : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ con $H(x,y) = \operatorname{sen}(2\pi y)$, note que

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \operatorname{sen}(2\pi y) \\ &= \operatorname{sen}(2\pi(y+n)) \\ &= H(x+m, y+n) \qquad \text{para todo } m,n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

por lo que H esta bien definida. Si el campo vectorial asociado a H es $X_H = v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y}$ entonces

$$\begin{aligned} \omega(X_H,\cdot) &= -dH \\ dx \wedge dy(v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y}, \cdot) &= -\frac{\partial H}{\partial x} dx - \frac{\partial H}{\partial y} \\ v_1 dy - v_2 dx &= 0dx - 2\pi \cos(2\pi y) dy \end{aligned}$$

Igualando los terminos de dx y dy se tiene que

$$v_1 = -2\pi \cos(2\pi y) \qquad \text{y} \qquad v_2 = 0$$

por lo que el campo vectorial asociado a H es

$$X_H = -2\pi \cos(2\pi y) \frac{\partial}{\partial x}.$$

2.4 Acciones de grupos como homomorfismos

En el estudio de las variedades tóricas, otra manera de ver a las acciones de grupos de Lie en una variedad es por homomorfismos, dicha identificación puede ayudar a visualizar mejor la manera en la que las acciones están relacionadas con la variedad.

Proposición 2.6. *Sean M una variedad tórica, G un grupo de Lie y $\psi : G \times M \mapsto M$ una acción de grupos, entonces $f : G \mapsto \mathrm{Diff}(M)$ con*

$$f(g) = \psi(g, .)$$

es un homomorfismo. Dicho de otro modo, dejando fija a $g \in G$ entonces $T_g : M \mapsto M$ definida por

$$T_g(x) = \psi(g, x)$$

es un difeomorfismo de M, y así

$$f(g) = T_g$$

es el homomorfismo que envia elementos de $g \in G$ a los difeomorfismos T_g.

Demostración:

Sean $g, h \in G$, entonces

$$\begin{aligned} f(g \cdot h) &= T_{g \cdot h} \\ &= \psi(g \cdot h, .) \\ &= \psi(g, \psi(h, .)) \\ &= T_g T_h = f(g) * f(h) \end{aligned}$$

□

Bajo esta identificación, la acción ψ es la evaluación de los difeomorfismos T_g en la variedad.

Definición 2.3. [1] Sean (M, ω) una variedad simpléctica, G un grupo de Lie y $\psi : G \times M \mapsto M$ una acción, entonces ψ es una **acción simpléctica** si

$$f : G \mapsto \mathrm{Sp}(M, \omega) \subset \mathrm{Diff}(M)$$

es decir, que ψ actua por simplectomorfismos.

Las acciones simplécticas son muy especiales, ya que estas preservan la forma simpléctica de la variedad, así, fijando a g en 1 la acción envia a la variedad M a ella misma, y al estar variando al elemento del grupo, la acción mueve suavemente a M al mismo tiempo que preserva su forma simpléctica, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.11. Acción de S^1 sobre $\mathbb{T}^2$ con la forma simpléctica $\omega = d\theta_1 \wedge d\theta_2$.

Para este ejemplo, se usará de nuevo la identificación de $\mathrm{O}(2)$ con S^1, primero se verá que el grupo $\mathrm{O}(2)$ es simpléctico.

Sea $X \in \mathrm{O}(2)$, si $X = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ entonces

$$\begin{aligned} X^T J_0 X &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta & -\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \\ \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo que $X \in \mathrm{Sp}(2)$. Por otro lado, los puntos de $\mathbb{T}^2$ se pueden definir mediante dos angulos θ_1, θ_2 y así, si $u \in \mathbb{T}^2$ entonces $u = (\theta_1, \theta_2)$ para algún θ_1, θ_2, así, se define la acción $\psi : S^1 \mapsto \mathbb{T}^2$ como sigue

$$\psi(t, u) = \psi(t, (\theta_1, \theta_2)) = (\theta_1 \cos t - \theta_2 \cos t, \theta_1 \operatorname{sen} t + \theta_2 \cos t)$$

luego, fijando a u en $p = (\theta_{01}, \theta_{02})$ se tiene que

$$C_p(t) = \psi(t, p) = (\theta_{01} \cos t - \theta_{02} \cos t, \theta_{01} \operatorname{sen} t + \theta_{02} \cos t)$$

luego, derivando respecto a t y evaluando en 0

$$\begin{aligned} \frac{dC_p(0)}{dt} &= (-\theta_{01} \operatorname{sen} t - \theta_{02} \operatorname{sen} t, \theta_{01} \cos t - \theta_{02} \operatorname{sen} t) \\ &= (-\theta_{02}, \theta_{01}) \end{aligned}$$

por último, se obtiene al campo vectorial

$$X = -\theta_{02} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \theta_{01} \frac{\partial}{\partial \theta_2}$$

con la función hamiltoniana asociada es

$$H(\theta_1, \theta_2) = -\frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2).$$

Viendo a la acción desde el punto de vista de homomorfismos, se toma a $f : S^1 \mapsto \text{Diff}(\mathbb{T}^2)$ con

$$f(g) = T_g = \psi(g, \cdot)$$

entonces, cuando $t = 0$

$$f(0) = \mathbb{1}$$

así, f deja intacto a $\mathbb{T}^2$, y cuando $t = \frac{\pi}{2}$ entonces

$$f(\frac{\pi}{2}) = J_0$$

por lo que f hace un cambio de variables en las coordenadas con

$$T_{\frac{\pi}{2}}(\theta_1, \theta_2) = (-\theta_2, \theta_1).$$

Variar a t en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ corresponde a mover al toro uniformemente de modo que este conserva su forma simplecta, mientras que hace gradualmente el cambio de coordenadas.

Referencias

[1] Cannas da Silva, A. *Lectures on symplectic geometry*, vol. 1764 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[2] McDuff, D. Introduction to symplectic topology. In *Symplectic geometry and topology (Park City, UT, 1997)*, vol. 7 of *IAS/Park City Math. Ser.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 5–33.

[3] Rotman, J. *Advanced Modern Algebra.* Prentice Hall, London, UK, 2002.