

# Politopos de Delzant 2-Dimensionales y variedades tóricas

Esteban Reyes Saldaña<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Veracruzana, Licenciatura en Matemáticas, estebanrs\_28@hotmail.com

\*Verano de Investigación 2017

## Abstract

Las variedades tóricas son un tipo especial de variedades de dimensión par que se pueden describir a partir de politopos de Delzant. Un politopo de Delzant  $\Delta$  en  $\mathbb{R}^n$  es una figura convexa que es *simple* (hay  $n$  aristas encontrándose en cada vértice), *racional* (las aristas encontrándose en el vértice  $p$  son de la forma  $p + tu_i$ ,  $t \geq 0$ , donde  $u_i \in \mathbb{Z}^n$ ) y *suave* (para cada vértice los correspondientes  $u_1, u_2, \dots, u_n$  se pueden escoger como una  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathbb{Z}^n$ ).

En este documento se clasifican los politopos 2-dimensionales de 3 y 4 vértices, se menciona el Teorema de Delzant (hay una biyección entre las variedades tóricas y los politopos de Delzant) y se construye la variedad tórica del triángulo y las de un tipo especial de politopos 2-dimensionales de 4 vértices: las superficies de Hirzebruch.

## Introducción

Las bases que generan a  $\mathbb{Z}^2$  tienen un determinante muy particular. Después de dar definiciones fundamentales para comprender este documento, se comienza enunciando la propiedad antes mencionada para luego clasificar los politopos de Delzant 2-dimensionales de 3 y 4 vértices usando propiedades de determinantes, teoría de números y geometría del plano. Resulta ser que existe sólo un politopo de Delzant 2-dimensional de 3 vértices: el triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales miden 1.

Después se describe la construcción de Delzant para el caso general usando álgebras de Lie inducidas sobre  $\mathbb{T}^N$  y  $\mathbb{T}^n$  donde  $N$  es el número de lados del politopo y  $n$  es la dimensión del espacio donde vive el politopo. Por último, se construye la variedad tórica del politopo uni-dimensional, la del triángulo y las variedades tóricas llamadas superficies de Hirzebruch (cuyos politopos son trapecios rectángulos muy peculiares).

# 1 Preliminares

A continuación se presentan algunas definiciones fundamentales para el entendimiento de este trabajo. Si desea consultar los conceptos a profundidad se recomienda revisar [6], [2] para álgebra moderna, [3] para álgebra lineal y [1] para geometría simpléctica y álgebra lineal simpléctica.

## 1.1 Teoría de Grupos

**Definición 1.1** Si  $X$  es un conjunto y  $G$  es un grupo, entonces  $G$  **actúa** sobre  $X$  si hay una función  $G \times X \rightarrow X$ , denotada por  $(g, x) \mapsto gx$ , tal que

- (i)  $(gh)x = g(hx)$  para todo  $g, h \in G$  y  $x \in X$ .
- (ii)  $1x = x$  para todo  $x \in X$ , donde  $1$  es la identidad en  $G$ .

**Definición 1.2** Si  $G$  actúa sobre  $X$  y  $x \in X$ , entonces la **órbita** de  $x$ , denotada por  $O$ , es el subconjunto de  $X$

$$O(x) = \{gx : g \in G\} \subseteq X;$$

el **estabilizador** de  $x$ , denotado por  $G_x$ , es el subgrupo

$$G_x = \{g \in G : gx = x\} \leq G.$$

**Definición 1.3** Un grupo  $G$  **actúa libremente** sobre  $X$  si, para todo  $x \in X$ ,  $gx = x$ , implica  $g = 1$ . Esto significa que todos los estabilizadores son triviales.

**Definición 1.4** Sea  $G$  un grupo. Un subgrupo  $N$  se dice que es un **subgrupo normal** de  $G$  si para toda  $g \in G$  y toda  $n \in N$ ,  $gn g^{-1} \in N$ .

**Definición 1.5** Sea  $\sim$  la relación de equivalencia de órbita: para  $p, q \in M$ ,

$$p \sim q \iff p \text{ y } q \text{ están en la misma órbita.}$$

EL espacio  $M/G := M / \sim$  es llamado el **espacio de órbitas**.

**Definición 1.6** El **grupo lineal**  $GL(2, \mathbb{Z})$  se define como

$$GL(2, \mathbb{Z}) = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}) | A \text{ es invertible}\}.$$

**Definición 1.7** El **grupo lineal especial** se define como

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2, \mathbb{Z}) | \det A = 1\}.$$

## 1.2 Geometría Simpléctica

**Definición 1.8** [4] *Un espacio vectorial simpléctico es un par  $(V, \omega)$  que consta de un espacio vectorial de dimensión real finita y una forma bilinear antisimétrica no degenerada  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Esto significa que se satisface las siguientes condiciones*

**(Antisimetría)** Para todo  $v, w \in V$

$$\omega(v, w) = -\omega(w, v).$$

**(No degenerada)** Para todo  $v \in V$

$$\omega(v, w) = 0 \text{ para todo } w \in V \text{ entonces } v = 0.$$

**Nota**

1.  $\dim V = 2n$  para  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

**Definición 1.9** [1] *Una variedad tórica (simpléctica)  $2n$ -dimensional es una variedad simpléctica conexa y compacta  $(M^{2n}, \omega)$  equipada con una acción hamiltoniana<sup>1</sup> efectiva de un  $n$ -toro  $\mathbb{T}^n$  y una función momento  $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

**Definición 1.10** [1] *Un politopo de Delzant  $\Delta$  en  $\mathbb{R}^n$  es un politopo que satisface*

- **simplicidad**, i.e., hay  $n$  aristas encontrándose en cada vértice.
- **racionalidad**, i.e., las aristas encontrándose en el vértice  $p$  son racionales en el sentido que cada arista es de la forma  $p + tu_i$ ,  $t \geq 0$ , donde  $u_i \in \mathbb{Z}^n$ .
- **suavidad**, i.e., para cada vértice los correspondientes  $u_1, u_2, \dots, u_n$  se pueden escoger como una  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathbb{Z}^n$ .

**Nota**

1. En  $\mathbb{R}^n$  la cota mínima del número de vértices es  $n + 1$ . Como  $\Delta$  debe tener  $n$  aristas encontrándose en cada vértice  $p$ , todas esas aristas comparten sólo el vértice  $p$  y para formalas se necesitan otros  $n$  vértices distintos, por lo que se necesitarán al menos  $n + 1$  vértices para cumplir con la simplicidad.

**Definición 1.11** *Una cara de un politopo  $\Delta$  es el conjunto de la forma  $\Delta \cap \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = c\}$  donde  $c \in \mathbb{R}$  y  $f \in (\mathbb{R}^n)^*$  que satisface  $f(x) \geq c$ , para todo  $x \in \Delta$ .*

---

<sup>1</sup>para ver ver la definición de acción hamiltoniana consulte [4].

**Definición 1.12** *Un lado de un politopo  $n$ -dimensional es una cara  $(n-1)$ -dimensional.*

**Definición 1.13** *Un vector reja  $v \in \mathbb{Z}^n$  es primitivo si no puede ser escrito como  $v = ku$  con  $u \in \mathbb{Z}^n$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  y  $|k| > 1$ .*

Por ejemplo,  $(1, 1)$ ,  $(5, 4)$  y  $(0, 1)$  son primitivos, pero  $(2, 2)$ ,  $(4, 6)$  y  $(3, 9)$  no lo son.

Sea  $\Delta$  un politopo de Delzant en  $(\mathbb{R}^n)^*$  con  $N$  lados. Sean  $v_i \in \mathbb{Z}^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  los vectores normales primitivos que apuntan hacia afuera de los lados de  $\Delta$ . Podemos describir a  $\Delta$  de manera algebraica como la intersección de medio-espacios:

$$\Delta = \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, v_i \rangle \leq \lambda_i, i = 1, 2, \dots, N\} \quad (1)$$

para algún  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ .

## Notas

1. Aunque identificamos  $\mathbb{R}^n$  con su dual a través del producto interior euclidiano, es más claro ver a  $\Delta$  en  $(\mathbb{R}^n)^*$  para la construcción de Delzant.
2. También se puede construir  $\Delta$  en (1) considerando los vectores normales que apuntan hacia adentro de los lados.

## 2 Clasificación

Antes de comenzar con la clasificación de los politopos 2-dimensionales, se verá una propiedad fundamental de las bases de  $\mathbb{Z}^2$ . Se denotará a un vector por una letra minúscula con un par ordenado  $v = (v_1, v_2)$  o por un par ordenado  $(v_1, v_2)$  y a un punto por una letra mayúscula con un par ordenado  $A = (a_1, a_2)$ .

**Lema 1** *Si  $u = (u_1, u_2)$  y  $v = (v_1, v_2)$  forman una base de  $\mathbb{Z}^2$  y  $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$  entonces  $\det A \mid v_1$ ,  $\det A \mid v_2$ ,  $\det A \mid u_1$  y  $\det A \mid u_2$  (i.e.,  $\det A$  divide a cada una de las entradas de los vectores  $u$  y  $v$ ).*

**Demostración.** Suponga que  $u = (u_1, u_2)$  y  $v = (v_1, v_2)$  generan a  $\mathbb{Z}^2$ . Entonces para todo  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ , existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\begin{aligned} (n, m) &= \alpha(u_1, u_2) + \beta(v_1, v_2) \\ &= (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2) \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} \alpha u_1 + \beta v_1 &= n \\ \alpha u_2 + \beta v_2 &= m \end{aligned} \quad (2)$$

Se procede a resolver (2) mediante la *regla de Cramer* (note que si  $\det A = 0$ ,  $u$  y  $v$  no forman una base de  $\mathbb{Z}^2$ ):

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{v_2}{\det A}n - \frac{v_1}{\det A}m \\ \beta &= \frac{u_1}{\det A}m - \frac{u_2}{\det A}n\end{aligned}\tag{3}$$

Para asegurar que  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  para cualesquiera números enteros  $m, n$  debe pasar en (3):

$$\begin{aligned}\det A | v_1 \\ \det A | v_2 \\ \det A | u_1 \\ \det A | u_2\end{aligned}$$

□

**Lema 2** Sea  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$ . Si  $\det A = \pm 1$  entonces

- (i) los elementos de la misma fila son primos relativos.
- (ii) los elementos de la misma columna son primos relativos.

**Demostración.** Sea  $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$  con  $\det A = \pm 1$ . Suponga que los elementos de una columna (digamos la primera) tienen un divisor común  $n \neq \pm 1$ :  $u_1 = nu'_1$  y  $u_2 = nu'_2$  tal que  $n \neq \pm 1$  y  $u'_1, u'_2 \in \mathbb{Z}$  entonces

$$\begin{aligned}\pm 1 &= \begin{vmatrix} nu'_1 & v_1 \\ nu'_2 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= n \begin{vmatrix} u'_1 & v_1 \\ u'_2 & v_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{vmatrix} u'_1 & v_1 \\ u'_2 & v_2 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{n}$$

Lo cual es una contradicción, pues  $\begin{vmatrix} u'_1 & v_1 \\ u'_2 & v_2 \end{vmatrix} \in \mathbb{Z}$  pero  $\pm \frac{1}{n} \notin \mathbb{Z}$ .

Análogamente se prueba que los elementos de la misma fila son primos relativos.

□

**Teorema 1**  $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2)$  forman una base de  $\mathbb{Z}^2$  y  $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$  sí y sólo si  $\det A = \pm 1$ .

**Demostración.**

(i) Suponga que  $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2)$  forman una base de  $\mathbb{Z}^2$  y sea  $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$  con  $\det A = d$ . Por el Lema 1 se tiene que  $u = (du'_1, du'_2)$  y  $v = (dv'_1, dv'_2)$  para algunos números enteros  $u'_1, u'_2, v'_1, v'_2$ . Entonces

$$\begin{aligned} d &= \begin{vmatrix} du'_1 & dv'_1 \\ du'_2 & dv'_2 \end{vmatrix} \\ &= d^2 \begin{vmatrix} u'_1 & v'_1 \\ u'_2 & v'_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} &= \begin{vmatrix} u'_1 & v'_1 \\ u'_2 & v'_2 \end{vmatrix} \\ &= u'_1 v'_2 - u'_2 v'_1 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

así  $\frac{1}{d} \in \mathbb{Z}$ . Por lo que  $d = \det A = \pm 1$ .

(ii) Suponga que  $\det A = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 1$ . El Lema 2 asegura que  $u = (u_1, u_2)$  y  $v = (v_1, v_2)$  son linealmente independientes (i.e., uno de los vectores no es múltiplo del otro). Se verá ahora que se puede generar cualquier  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ .

Note que es posible escribir  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  como combinación lineal de  $(u_1, u_2)$  y  $(v_1, v_2)$ :

1.  $v_2(u_1, u_2) + (-u_2)(v_1, v_2) = (u_1 v_2 - u_2 v_1, u_2 v_2 - u_2 v_2) = (\det A, 0) = (1, 0)$
2.  $-v_1(u_1, u_2) + u_1(v_1, v_2) = (-u_1 v_1 + u_1 v_1, -u_2 v_1 + u_1 v_2) = (0, \det A) = (0, 1)$

así,

$$\begin{aligned} (m, n) &= m(1, 0) + n(0, 1) \\ &= m[v_2(u_1, u_2) + (-u_2)(v_1, v_2)] + n[-v_1(u_1, u_2) + u_1(v_1, v_2)] \\ &= (mv_2 - nu_2)(u_1, u_2) + (nu_1 - mv_1)(v_1, v_2) \end{aligned}$$

Por lo que cualquier  $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ , se puede escribir como combinación lineal de  $(u_1, u_2)$  y  $(v_1, v_2)$ . De manera análoga se demuestra cuando  $\det A = -1$ .

□

**Nota**

1. El grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$  es el conjunto de matrices que forman bases de  $\mathbb{Z}^2$ .

**Proposición 1** *Existe sólo un politopo de Delzant 2-dimensional con 3 vértices: el triángulo rectángulo isósceles  $\triangle ABC$  con  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$  y  $AB = AC = 1$ ; salvo translaciones, cambios de escala y la acción de  $SL(2, \mathbb{Z})$ .*

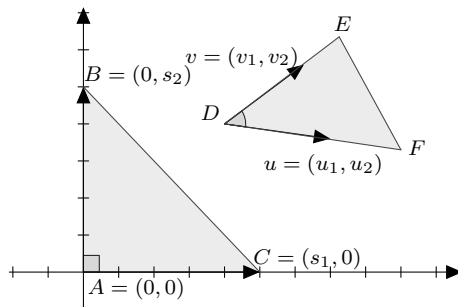


Figure 1: Polítopos 2-dimensionales con tres vértices

**Demostración.** Suponga que  $\triangle DEF$  es un politopo de Delzant 2-dimensional con tres vértices. Sean  $u$  y  $v$  los vectores correspondientes a los lados  $DE$  y  $EF$ , respectivamente, que cumplen la *racionalidad* y la *suavidad* de la Definición 1.10. Así  $u$  y  $v$  forman una base de  $\mathbb{Z}^2$ . Se quiere una transformación lineal tal que  $X(u) = (1, 0)$ ,  $X(v) = (0, 1)$ . Obsérvese que

1.  $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$
2.  $\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Sea  $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ . Por el Teorema 1,  $\det A = \pm 1$ . Sin perder generalidad, suponga que  $\det A = 1$ .

### Notas

1. No se pierde generalidad al suponer que  $\det A = 1$  puesto que cuando  $\det A = -1$  se han permutado las columnas de la matriz  $A$ .
2.  $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ .
3.  $A^{-1} = \begin{pmatrix} v_2 & -v_1 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ .

Por lo que una transformación lineal en  $SL(2, \mathbb{Z})$  tal que  $X(u) = (1, 0)$ ,  $X(v) = (0, 1)$  tiene como matriz asociada a  $\begin{pmatrix} v_2 & -v_1 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix}$ .

1.  $\begin{pmatrix} v_2 & -v_1 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_2 - v_1 u_2 \\ -u_1 u_2 + u_1 u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
2.  $\begin{pmatrix} v_2 & -v_1 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 v_2 - v_1 v_2 \\ -v_1 u_2 + u_1 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Se ha llevado a los vectores  $u$  y  $v$  a  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  por medio de una transformación lineal  $X$  que preserva el área (i.e.,  $X \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ ). Ahora se verá lo que deben cumplir las medidas de los catetos del  $\triangle ABC$  en la figura 1.

Sean  $(0, -1)$  y  $(t_1, -t_2)$  con  $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  los vectores correspondientes a los lados BA Y BC, respectivamente, que cumplen la *racionalidad* y la *suavidad* de la Definición 1.10. Así  $(0, -1)$  y  $(t_1, -t_2)$  forman una base de  $\mathbb{Z}^2$ , entonces

$$1 = \begin{vmatrix} 0 & t_1 \\ -1 & -t_2 \end{vmatrix} = t_1$$

Si  $(t_1, -t_2)$  y  $(0, -1)$  forman una base de  $\mathbb{Z}^2$  en el vértice B, en el vértice C se tiene que  $(-t_1, t_2)$  y  $(-1, 0)$  forman una base de  $\mathbb{Z}^2$ , entonces

$$1 = \begin{vmatrix} -t_1 & -1 \\ t_2 & 0 \end{vmatrix} = t_2$$

Por lo que  $(s_1, -s_2) \parallel (1, -1)$  entonces  $(s_1, -s_2) = \alpha(1, -1)$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ , de donde  $s_1 = s_2$ . Entonces  $\triangle ABC$  es un triángulo rectángulo isósceles con  $AB = AC$ . Como no se consideran escalas, se tomará  $AB = 1$ .

Se ha llegado a que cualquier politopo de Delzant 2-dimensional con tres vértices se puede llevar al triángulo rectángulo isósceles con  $AB = AC = 1$ . Así, sólo hay un politopo 2-dimensional de tres vértices salvo translaciones, cambios de escala o la acción de  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ .

□

**Proposición 2** *Los politopos de Delzant 2-dimensionales con 4 vértices son trapecios rectángulos; salvo translaciones y la acción de  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ .*

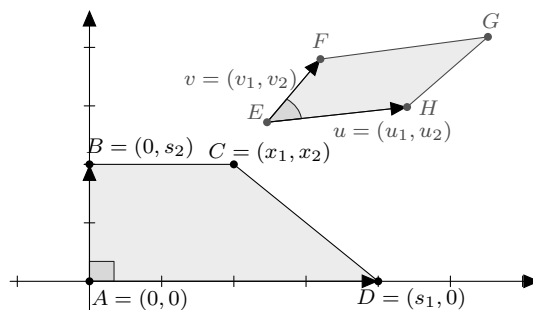


Figure 2: Politopos 2-dimensionales con cuatro vértices

### Nota

1. Se considerará sólo el caso donde el lado  $BC$  tiene pendiente positiva o cero y el lado  $CD$  tiene pendiente negativa o cero. En el resto de los casos se trata de una rotación.



**Demostración.** Por la Proposición 1, una transformación lineal en  $SL(2, \mathbb{Z})$  tal que  $X(u) = (1, 0)$ ,  $X(v) = (0, 1)$  tiene como matriz asociada a  $\begin{pmatrix} v_2 & -v_1 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix}$ . Se usará esta misma transformación para llevar  $u$  a  $(1, 0)$  y  $v$  a  $(0, 1)$ .

En el vértice B, sean  $(0, -1)$  y  $(w_1, w_2)$  con  $w_1, w_2 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  los vectores de los lados BA Y BC descritos en la definición 1. Así  $(0, -1)$  y  $(w_1, w_2)$  forman una base de  $\mathbb{Z}^2$  entonces

$$1 = \begin{vmatrix} 0 & w_1 \\ -1 & w_2 \end{vmatrix} = w_1$$

En el vértice D, sean  $(-1, 0)$  y  $(-z_1, z_2)$  con  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  los vectores de los lados DA Y DC descritos en la definición 1. Así  $(-z_1, z_2)$  y  $(-1, 0)$  forman una base de  $\mathbb{Z}^2$  entonces

$$1 = \begin{vmatrix} -z_1 & -1 \\ z_2 & 0 \end{vmatrix} = z_2$$

En el vértice C, se debe cumplir que  $(z_1, -z_2) = (z_1, -1)$  y  $(-w_1, -w_2) = (-1, -w_2)$  forman una base de  $\mathbb{Z}^2$  entonces

$$1 = \begin{vmatrix} -1 & z_1 \\ -w_2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + w_2 z_1$$

de donde  $w_2 = 0$  o  $z_1 = 0$ .

### Notas

1. Para caracterizar a los polítopos 2-dimensionales de 4 vértices basta considerar sólo uno de los  $w_2, z_1$  igual a 0.
2. Si  $w_2 = 0 = z_1$ , el polítopo es un rectángulo.
3. Cuando  $w_2 = 0$  es fácil ver que  $s_1 = x_1 + \lambda$  con  $\lambda \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ .

Considérese  $w_2 = 0$ . Entonces el polítopo tiene dos ángulos rectos  $\sphericalangle DAB$  y  $\sphericalangle CBA$ . Los vértices del polítopo  $ABCD$  tienen como coordenadas

$$\begin{aligned} A &= (0, 0) \\ B &= (0, s_2) \\ C &= (x_1, s_2) \\ D &= (x_1 + \lambda, 0) \end{aligned}$$

□

### 3 Construcción de Delzant

En [1], Cannas expone que hay una biyección entre los politopos de Delzant y las Variaciones Tóricas (Teorema de Delzant). A continuación se explicará de manera breve cómo obtener la variación tórica  $(M_\Delta)$  asociada a cada politopo de Delzant  $(\Delta)$ .

Es importante mencionar que si un grupo de Lie se considera como una variedad en la que hay definida una operación de grupo que verifica unas ciertas propiedades topológicas, el álgebra de Lie correspondiente se puede identificar con el espacio tangente en la identidad del grupo [5]. Por ejemplo  $(S^1)^N$  induce un álgebra de Lie en  $\mathbb{R}^N$ .

Considere el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Lie}(S^1)^N & & \text{Lie}(S^1)^n = \mathfrak{g} \\
 & & \parallel & & \parallel \\
 \mathfrak{k} & \xrightarrow{i_*} & \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\pi_* : e_i \rightarrow u_i} & \mathbb{R}^n \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 K & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^N / 2\pi\mathbb{Z}^N & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n \\
 & & \parallel & & \parallel \\
 & & (S^1)^N & & (S^1)^n = G
 \end{array}$$

donde

- $N$  : número de lados de  $\Delta$ .
- $n$  : dimensión del espacio en el que se encuentra  $\Delta$ .
- $e_i$  : vectores canónicos de  $\mathbb{R}^N$ .
- $u_i$  : vectores normales a los lados de  $\Delta$  que apuntan hacia afuera.
- $K$  :  $\ker \pi_*$ .
- $\mathfrak{k}$  : Álgebra de Lie de  $K$ .

La secuencia

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{i} \mathbb{T}^N \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^n \longrightarrow 1$$

induce una secuencia exacta de álgebras de Lie

$$0 \longrightarrow \mathfrak{k} \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}^N \xrightarrow{\pi_*} \mathbb{R}^n \longrightarrow 0$$

#### Notas

1. La función  $\pi_*$  es sobreyectiva.
2.  $\pi_*$  induce una función sobreyectiva,  $\pi$ , entre los toros  $(S^1)^N$  y  $(S^1)^n$ .
3.  $\ker \pi = K$  es un subgrupo de Lie de  $\mathbb{T}^N$  con dimensión  $(N - n)$ .

Dualidad:

$$\begin{array}{ccc}
 i_k^* : (\mathbb{R}^N)^* & \longrightarrow & \mathfrak{k}^* \\
 (\mathbb{C}^N)^* & \xrightarrow{H : (z_1, \dots, z_N) \longrightarrow \frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_N|^2) - c} & (\mathbb{R}^N)^* \\
 & \searrow \Phi_k(z) & \swarrow i_k^* \\
 & & \mathfrak{k}^*
 \end{array}$$

donde se elige  $c = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  según la ecuación (1). Así  $M_\Delta := \Phi^{-1}(0)/K$ .

### Notas

1.  $K$  actúa libremente sobre  $\Phi^{-1}(0)$ .
2.  $M_\Delta$  es la variedad tórica buscada.

### 3.1 La receta

1. Se procede primero a encontrar la función  $\pi_*$ :

$$\begin{array}{ll}
 e_1 = (1, 0, \dots, 0) & \longrightarrow u_1 \\
 e_2 = (0, 1, \dots, 0) & \longrightarrow u_2 \\
 & \vdots \\
 e_N = (0, \dots, 0, 1) & \longrightarrow u_N
 \end{array}$$

2. Se encuentra  $\ker \pi_*$  usando la base canónica de  $\mathbb{R}^N$ .
3. Se contruye  $i_* : \ker \pi_* = \mathfrak{k} \longrightarrow \mathbb{R}^N$  y se encuentra su representación matricial  $A$  en la base canónica.
4. Se encuentra  $i^* : (\mathbb{R}^N)^* \longrightarrow \mathfrak{k}^*$  usando  $A$ , ya que

$$i_*(s_1, \dots, s_N) \longrightarrow A^T \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix}$$

5. Se compone  $i^* \circ H$  para encontrar  $\phi$  usando los  $\lambda$ 's de la ecuación (1).
6. Se hace  $\phi^{-1}(0)$  para realizar el cociente  $\Phi^{-1}(0)/K$ .

### 3.2 El espacio proyectivo

**Ejemplo 3.1** Considere al politopo en  $\mathbb{R}$ :



Según (1) podemos ver a  $\Delta$  como

$$\Delta = \{x \geq -1, x \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 & \lambda_1 &= 1 \\ u_2 &= -1 & \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

Procedemos a construir  $\Phi$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\pi_* : e_i \rightarrow u_i} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ \parallel & & \parallel \\ (\mathbb{S}^1)^2 & & (\mathbb{S}^1) \end{array}$$

Se encuentra  $\pi_*$ :

$$\begin{aligned} \pi_* : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (1 \quad -1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (x - y) \end{aligned}$$

Procedemos a encontrar el generador de  $\ker\pi_*$ :

$$\begin{aligned} \ker\pi_* &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} \\ &= \text{gen}\{(1, 1)\} \\ &= \text{gen}\{e_1 + e_2\} \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} i_* : \mathfrak{k} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (x) &= \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo que

$$i^* : (\mathbb{R}^2)^* \longrightarrow \mathfrak{k}^*$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} &= (1 \quad 1) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \\ &= (s_1 + s_2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{C}^2)^* & \xrightarrow{H : (z_1, z_2) \rightarrow \frac{1}{2}(|z_1|^2, |z_2|^2) - (1, 1)} & (\mathbb{R}^2)^* \\
 & \searrow \Phi_k(z) & \swarrow i_k^* \\
 & & \mathfrak{k}^*
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi(z_1, z_2) &= i^* \circ H(z_1, z_2) \\
 &= i^* \left( \frac{|z_1|^2}{2} - 1, \frac{|z_2|^2}{2} - 1 \right) \\
 &= \left( \frac{|z_1|^2}{2} + \frac{|z_2|^2}{2} - 2 \right)
 \end{aligned}$$

Se toma  $\Phi^{-1}(0)$  de donde:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 4.$$

Por lo que el espacio reducido es el espacio proyectivo:

$$(i^* \circ \phi)^{-1}(0)/K = \mathbb{CP}^1$$

### 3.3 La variedad del triángulo

**Ejemplo 3.2** Considere al politopo 2-dimensional de tres vértices descrito en la Proposición 1:

Según la ecuación (1) se puede ver a  $\Delta$  algebraicamente como

$$\Delta = \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$$

$$\begin{array}{ll}
 u_1 &= (0, 1) & \lambda_1 &= 0 \\
 u_2 &= (-1, 0) & \lambda_2 &= 0 \\
 u_3 &= (1, 1) & \lambda_3 &= 1
 \end{array}$$

Procedemos a construir  $\Phi$ :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\pi_* : e_i \rightarrow u_i} & \mathbb{R}^2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{R}^3/2\pi\mathbb{Z}^3 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2 \\
 \parallel & & \parallel \\
 (S^1)^3 & & (S^1)^2
 \end{array}$$

Se encuentra  $\pi_*$ :

$$\begin{aligned}
 \pi_*(x, y, z) &= (-y + z, -x + z) \\
 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -y + z \\ -x + z \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Procedemos a encontrar el generador de  $\ker\pi_*$ :

$$\begin{aligned}\ker\pi_* &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\} \\ &= \text{gen}\{(1, 1, 1)\} \\ &= \text{gen}\{e_1 + e_2 + e_3\}\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}i_* : \mathfrak{k} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ i_*(x) &= (x, x, x) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (x) &= \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

por lo que

$$i^* : (\mathbb{R}^3)^* \longrightarrow \mathfrak{k}^*$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} &= (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \\ &= (s_1 + s_2 + s_3)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^3)^* & \xrightarrow{H : (z_1, \dots, z_3) \mapsto \frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_3|^2) - (0, 0, 1)} & (\mathbb{R}^3)^* \\ & \searrow \Phi_k(z) & \swarrow i_k^* \\ & \mathfrak{k}^* & \end{array}$$

$$\begin{aligned}\Phi(z_1, z_2, z_3) &= i^* \circ H(z_1, z_2, z_3) \\ &= i^* \left( \frac{|z_1|^2}{2}, \frac{|z_2|^2}{2}, \frac{|z_3|^2}{2} - 1 \right) \\ &= \left( \frac{|z_1|^2}{2} + \frac{|z_2|^2}{2} + \frac{|z_3|^2}{2} - 1 \right)\end{aligned}$$

Por último, se toma  $\Phi^{-1}(0)$  de donde:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 2.$$

Haciendo el cociente se tiene que

$$M_\Delta = \Phi^{-1}(0)/K = \mathbb{C}P^2$$

### 3.4 Superficies de Hirzebruch

**Ejemplo 3.3** Considere un politopo 2-dimensional de cuatro vértices como se indica en la figura:

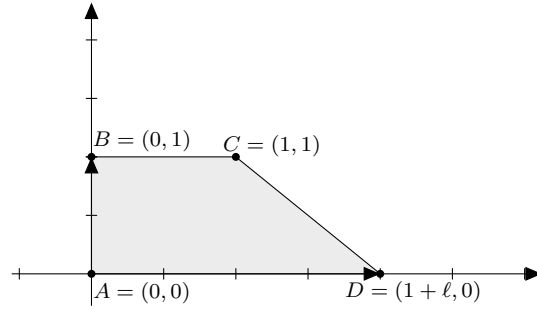


Figure 3: un politopo 2-dimensionales con cuatro vértices y un parámetro  $\ell$ .

$$\Delta = \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_2 \leq 1, x_1 + \ell x_2 \leq \ell + 1\}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= (0, -1) & \lambda_1 &= 0 \\ u_2 &= (-1, 0) & \lambda_2 &= 0 \\ u_3 &= (0, 1) & \lambda_3 &= 1 \\ u_4 &= (1, \ell) & \lambda_4 &= \ell + 1 \end{aligned}$$

Procedemos a construir  $\Phi$ :

$$\begin{array}{ccc} \text{Lie}(S^1)^4 & & \text{Lie}(S^1)^2 = \mathfrak{g} \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\pi_* : e_i \rightarrow u_i} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^4/2\pi\mathbb{Z}^4 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2 \\ \parallel & & \parallel \\ (S^1)^4 & & (S^1)^2 = G \end{array}$$

Tomando la base canónica de  $\mathbb{R}^4$  y un vector arbitrario  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ :

$$\pi_*(a, b, c, d) = (b + d, -a + c + \ell d)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b + d \\ -a + c + \ell d \end{pmatrix}$$

Procedemos a encontrar el generador de  $\ker \pi_*$ :

$$\begin{aligned} \ker \pi_* &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b = d, c = a - \ell b\} \\ &= \text{gen}\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, -\ell, 1)\} \\ &= \text{gen}\{e_1 + e_3, e_2 - \ell e_3 + e_4\} \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
 i \cdot_* \mathfrak{k} &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\
 i_*(a, b) &= (a, b, a - \ell b, b) \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -\ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ a - \ell b \\ b \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

por lo que

$$i^* : (\mathbb{R}^4)^* \longrightarrow \mathfrak{k}^*$$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -\ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} s_1 + s_3 \\ s_2 - \ell s_3 + s_4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{C}^4)^* & \xrightarrow{H : (z_1, \dots, z_4) \longrightarrow \frac{1}{2}(|z_1|^2, \dots, |z_4|^2) - (0, 0, 1, 1 + \ell)} & (\mathbb{R}^4)^* \\
 & \searrow \Phi_k(z) & \swarrow i_k^* \\
 & & \mathfrak{k}^*
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi(z_1, z_2, z_3, z_4) &= i^* \circ H(z_1, z_2, z_3, z_4) \\
 &= i^* \left( \frac{|z_1|^2}{2}, \frac{|z_2|^2}{2}, \frac{|z_3|^2}{2} - 1, \frac{|z_4|^2}{2} - \ell - 1 \right) \\
 &= \left( \frac{|z_1|^2}{2} + \frac{|z_3|^2}{2} - 1, \frac{|z_2|^2}{2} - \ell \frac{|z_3|^2}{2} + \frac{|z_4|^2}{2} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

Por último, se toma  $\Phi^{-1}(0)$  de donde:

$$|z_1|^2 + |z_3|^2 = 2.$$

$$|z_2|^2 - \ell |z_3|^2 + |z_4|^2 = 2.$$

Entonces  $M_\Delta = \Phi^{-1}(0)/K$  es una superficie de Hirzebruch. Si  $\lambda = 0$  este tipo de variedad tórica es un producto de dos esferas. Para ver más sobre este tema consulte [1].



---

## Referencias

- [1] CANNAS DA SILVA, A. *Lectures on symplectic geometry*, vol. 1764 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [2] HERSTEIN, I. N. *Álgebra moderna*. No. 512 H569a. México, MX: Trillas, 1988.
- [3] HOFFMAN, K., KUNZE, R., AND FINSTERBUSCH, H. E. *Álgebra lineal*. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1973.
- [4] MCDUFF, D. Introduction to symplectic topology. In *Symplectic geometry and topology (Park City, UT, 1997)*, vol. 7 of *IAS/Park City Math. Ser.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 5–33.
- [5] RODRÍGUEZ, M. A. *Álgebras de Lie*. Madrid, España, 2007.
- [6] ROTMAN, J. *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall, London, UK, 2002.