Acciones hamiltonianas en variedades simplécticas tóricas

Carlos Adrián Pérez Estrada

04 de Agosto del 2017

Resumen

En el presente trabajo se habla sobre las acciones hamiltonianas en las variedades simplécticas. Se brindan las caracteristicas escenciales de tales acciones (los puntos fijos y estabilizadores) y se trabaja con el método de reducción simpléctica para generar otros espacios vectoriales simplécticos así como entender la fibración de Hopf en la 3-esfera.

1. Introducción

En las matemáticas resulta interesante y estimulante definir conceptos que, a base de teoremas y proposiciones, brindan nuevas carácteristicas a lo ya estudiado e introducen nuevos objetos matemáticos. Ejemplos de ello son los conceptos de producto interno en un espacio vectorial y espacio topológico. El primero permite generalizar las nociones de ángulo entre vectores, distancia, longitud, etc. a espacios vectoriales diferentes de $\mathbb{R}^n$ y el segundo permite crear equivalencias entre conjuntos en apariencia distintos.

Un concepto muy parecido al producto interno es el que sustenta este trabajo: las formas simplécticas. Si consideramos un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{R}$, se puede decir que es simpléctico si se le puede asociar una función ω que sea bilineal, antisimétrica y no degenerada. Dicha función, en caso de existir, se dice que es simpléctica y brinda información acerca del espacio y una forma de hacer transformaciones preservando el area. Así como existen matrices asociadas a transformaciones lineales, cada funcion simpléctica tiene una matriz asociada en función de la base del espacio vectorial. Tales funciones son estudiadas por la geometría simpléctica, la cual estudia todo lo relacionado con los espacios vectoriales simplécticos y por medio de la topología simpléctica estudiá a las variedades simplécticas,

Las variedades simplécticas tienen asociada la acción de un grupo y una función llamada Hamiltoniano. Dichas acciones permiten preservar medidas de la variedad mediante transformaciones. Cuando la variedad simpléctica de dimensión $2n$ es compacta, conexa y en ella actúa un toro de dimensión n, se dice que la variedad es simpléctica tórica. Estas últimas pueden ser clasificadas mediante los politopos de Delzant. A cada variedad tórica le corresponde un único politopo de Delzant y viceversa; a cada uno de estos les corresponde una y solo una variedad tórica.

Por otra parte, cuando se trabaja en el espacio vectorial de $\mathbb{R}^{2n}$ con una acción hamiltoniana, se puede desarrollar el método de reducción simpléctica para obtener otro espacio vectorial simpléctico de dimensión menor que el $\mathbb{R}^{2n}$ utilizado al principio del método. Cuando se utiliza este método con el grupo $\mathbb{S}^1$ se puede demostrar la descomposición de la 3-esfera en 1-esferas que Heinz Hopf formuló en 1931. El estudio de la geometría simpléctica requiere de conocer conceptos basicos de álgebra lineal, teoría de grupos y topología. Los conceptos de las primeras dos ramas se dan en la sección de preeliminares y los conceptos topológicos se dan en la siguiente sección en donde ya se hace el estudio de una acción hamiltoniana en una variedad simpléctica tórica. Dicho estudio comprende el cálculo de los puntos fijos y estabilizadores de la acción asi como la comprensión del politopo asociado a dicha variedad y las imagenes inversas de los diferentes puntos del politopo. Ya en la sección del método de reducción simpléctica se explica en que consiste este y se dan dos ejemplos de su aplicación. En el último ejemplo se explica como de lo obtenido se puede derivar una demostración de la descomposición de la 3-esfera en muchas 1-esferas.

Es importante resaltar que este trabajo se ha logrado gracias al apoyo del Honorable Consejo Técnico del Programa Delfín; sin su ayuda, mi estancia en la ciudad de Colima no hubiera sido posible. Mis agradecimientos también van hacia la Universidad de Colima y a mi asesor Andrés Pedroza, el cual me apoyó en las siete semanas que duró la investigación.

2. Preeliminares

Definición 1 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{R}$. Se dice que V es un espacio vectorial simpléctico si existe una función $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que para cada $a, b, c \in V$ y $k \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes tres características:*

(1) ω ***es bilineal:***

$$\omega(a+b,c) = \omega(a,c) + \omega(b,c).$$
$$\omega(a,b+c) = \omega(a,b) + \omega(a,c).$$
$$\omega(ka,b) = \omega(a,kb) = k\omega(a,b).$$

(2) ω ***es antisimétrica:***
$\omega(a,b) = -\omega(b,a)$.

(3) ω ***es no degenerada:***
si $\omega(a,b) = 0$ *para cada* $b \in V$*, entonces* $a = 0$.

Un espacio vectorial simpléctico es denotado como el par (V, ω).

Teorema 2 *Todo espacio vectorial simpléctico es de dimensión par.*

La demostración del teorema anterior puede ser consultada en [1].

Definición 3 *Sea V un espacio vectorial sobre cierto campo K. Se define al espacio vectorial dual de V como*

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{K} \textit{ tal que } f \textit{ es una transformación lineal } \}.$$

V^* también es un espacio vectorial sobre el campo K bajo las siguientes operaciones:

(1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

(2) $(kf)(x) = kf(x)$

Para cada $f, g \in V^*$, $x \in V$ y $k \in K$.

Forma simpléctica estandar de $\mathbb{R}^{2n}$
La forma simpléctica estándar en $\mathbb{R}^{2n}$ es la siguiente:

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge dy_k \tag{1}$$

Los dx_i y dy_i anteriores corresponden a unas formas diferenciales que se evalúan en dos campos vectoriales y dan como resultado una función. Dichas formas diferenciales son elementos del espacio dual $\mathbb{R}^*$

Consideremos dos campos vectoriales $X = (f_{11}, f_{21}, \cdots, f_{1n}, f_{2n})$ y $Y = (g_{11}, g_{21}, \cdots, g_{1n}, g_{2n})$. en donde $f_{1i}, f_{2i}, g_{1i}, g_{2i}$ son funciones para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Por conveniencia, denotaremos a los campos vectoriales como $X = f_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + f_{21}\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + f_{1n}\frac{\partial}{\partial x_n} + f_{2n}\frac{\partial}{\partial x_n}$ y $Y = g_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + g_{21}\frac{\partial}{\partial x_1} + ... + g_{1n}\frac{\partial}{\partial x_n} + g_{2n}\frac{\partial}{\partial x_n}$.

La forma de evaluar a las funciones dx_i y dy_i es la siguiente: $dx_i(X) = f_{1i}$ y $dy_i(X) = f_{2i}$ de tal manera que la operación $dx_i \wedge dy_1(X, Y)$ se define como sigue: $dx_i \wedge dy_1(X, Y) = dx_i(f) * dy_i(g) - dy_i(f) * dx_i(g) = f_{1i} * g_{2i} - f_{2i} * g_{1i}$.

Con lo anterior en mente, la función ω queda definida como sigue: $\omega = \sum_{i=1}^{n} = dx_i \wedge dy_1(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} dx_i(X) * dy_i(Y) - dy_i(X) * dx_i(Y) = \sum_{i=1}^{n} f_{1i} * g_{2i} - f_{2i} * g_{1i}$.

Teorema 4 $\omega = \sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge dy_k$ *es una función bilineal, antisimétrica y no degenerada.*

Demostración.
Sean X, Y, Z una tripleta de campos vectoriales y $a : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ una función. Los campos X y Y están definidos igual que en la explicación anterior y Z será definido como $Z = h_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + h_{21}\frac{\partial}{\partial y_1} + ... + h_{1n}\frac{\partial}{\partial x_n} + h_{2n}\frac{\partial}{\partial y_n}$. En donde h_{1i} y h_{2i} son funciones para cada $i \in \{1, 2 \cdots, n\}$. Se procederá a demostrar que se cumplen las siguientes tres propiedades:

1. ω **es bilineal**

Se mostrará que ω separa sumas en su primera entrada:

$$\omega(X+Y,Z)=$$

$$\sum_{k=1}^{n} dx_k\wedge dy_k(X+Y,Z)=$$

$$\sum_{k=1}^{n} dx_k(X+Y)*dy_k(Z)-dy_k(X+Y)*dx_k(Z)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}(f_{1k}+g_{1k})*h_{2k}-(f_{2k}+g_{2k})*h_{1k}\big)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\big(f_{1k}*h_{2k}-f_{2k}*h_{1k})+\big(g_{1k}*h_{2k}-g_{2k}*h_{1k}\big)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\big(dx_k(X)*dy_k(Z)-dy_k(X)*dx_k(Z)\big)+\big(dx_k(Y)*dy_k(Z)-dy_k(Y)*dx_k(Z)\big)=$$

$$\omega(X,Z)+\omega(Y,Z).$$

ω separa sumas en la segunda entrada:

$$\omega(X,Y+Z)=$$

$$\sum_{k=1}^{n} dx_k\wedge dy_k(X,Y+Z)=$$

$$\sum_{k=1}^{n} dx_k(X)*dy_k(Y+Z)-dy_k(X)*dx_k(Y+Z)=$$

$$\sum_{k=1}^{n} f_{1k}*(g_{2k}+h_{2k})-f_{2k}*(g_{1k}+h_{1k}\big)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\big(f_{1k}*g_{2k}-f_{2k}*g_{1k})+\big(f_{1k}*h_{2k}-f_{2k}*h_1k\big)=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\big(dx_k(X)*dy_x(Y)-dy_k(X)*dx_k(Y)\big)+\big(dx_k(X)*dy_x(Z)-dy_k(X)*dx_k(Z)\big)=$$

$$\omega(X,Y)+\omega(X,Z).$$

ω saca constantes en ambas entradas:

$$\omega(aX,Y) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge dy_k(aX,Y) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} dx_k(aX) * dy_k(Y) - dy_k(aX) * dx_k(Y) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} af_{1k} * g_{2k} - af_{2k} * g_{1k} =$$

$$a\sum_{k=1}^{n} f_{1k} * g_{2k} - f_{2k} * g_{1k} =$$

$$a * \omega(X,Y).$$

Por otra parte:

$$\omega(X,aY) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge dy_k(X,aY) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} dx_k(X) * dy_k(aY) - dy_k(X) * dx_k(aY) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} f_{1k} * ag_{2k} - f_{2k} * ag_{1k} =$$

$$a\sum_{k=1}^{n} f_{1k} * g_{2k} - f_{2k} * g_{1k} =$$

$$a * \omega(X,Y).$$

Por tanto, ω es una función bilineal.

2. ω **es antisimétrica**:

$$\omega(X,Y) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge dy_k(X,Y) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} dx_k(X) * dy_k(Y) - dy_k(X) * dx_k(Y) =$$
$$-\sum_{k=1}^{n} dy_k(X) * dx_k(Y) - dx_k(aX) * dy_k(Y) =$$
$$-\omega(Y,X).$$

3. ω **es no degenerada**: Hay que demostrar que si $X \neq 0$, entonces existe algún $Y \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que $\omega(X,Y) \neq 0$.

   Sea $X \in \mathbb{R}^{2n} - \{\vec{0}\}$. Como $X = f_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + f_{21}\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots f_{1n}\frac{\partial}{\partial x_n} + f_{2n}\frac{\partial}{\partial y_n}$, algún f_{ij} es diferente de 0. Sin perdida de la generalidad supongase que $f_{11} \neq 0$. Sea $Y = -f_{21}\frac{\partial}{\partial x_1} + f_{11}\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots - f_{2n}\frac{\partial}{\partial x_n} + f_{1n}\frac{\partial}{\partial y_n}$.
   Se tiene que:
$$\omega(X,Y) = \sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge dy_k(X,Y) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} dx_k(X) * dy_k(Y) - dy_k(X) * dx_k(Y) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} f_{1i} * f_{1i} - (-f_{2i}) * f_{2i} =$$
$$\sum_{k=1}^{n} f_{1i} * f_{1i} + f_{2i} * f_{2i}$$

   Se ve que la expresión $f_{1i} * f_{1i} + f_{2i} * f_{2i}$ es cero si y solo si $f_{1i} = f_{2i} = 0$ ya que las imagenes de dichas funciones están contenidas en $\mathbb{R}$. Luego pues, $\sum_{k=1}^{n} f_{1i} * f_{1i} + f_{2i} * f_{2i} = 0$ será 0 si y solo si $f_{1i} * f_{1i} + f_{2i} * f_{2i} = 0$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots, 2n\}$ pero, por hipótesis, se tiene $f_{11} \neq 0$ por lo que $f_{11} * f_{11} + f_{21} * f_{21}$ es diferente de cero. Por tanto $W(X,Y) \neq 0$.

Con todo lo anterior, se le ha dotado a $\mathbb{R}^{2n}$ una estructura simpléctica.
■

Definición 5 *Sean $(G,+)$ un grupo y X un conjunto. Se dice que G actúa en X si existe una operación $*$: $G \times X \to X$ tal que para cada $g, h \in G$ y $x \in X$ se cumplen las siguientes 2 condiciones:*

(1) $(g+h)*x = g*(h*x)$

(2) $1_G * x = x$

Si G actúa sobre X se dice que X es un G-conjunto.

Definición 6 *Sean $(G,+)$ un grupo , X un G-conjunto y a un elemento de este último.*

(1) Se define a la orbita del elemento a como el conjunto

$$O_G(a) = \{g * a : g \in G\}.$$

(2) Se define al estabilizador del elemento a como el conjunto

$$G_a = \{g \in G : g * a = a\}.$$

Teorema 7 *Sean $(G,+)$ un grupo , X un G-conjunto y a, b elementos de este último. Se tiene que $O_G(a) = O_G(b)$ o $O_G(a) \cap O_G(b) = \emptyset$.*

Demostración.

Definamos la siguiente relación en el conjunto X: $a \sim b$ si y solo si $b \in O_G(a)$. Eso es: $a \sim b$ si y solo si existe algún $g \in G$ tal que $b = g * a$.

Demostraremos que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Sean a, b, c elementos de X.

1. $\sim$ **es reflexiva:**
   $a \sim a$ ya que $a = 1_G * a$.

2. $\sim$ **es simétrica:**
   si $a \sim b$, entonces existe $g \in G$ tal que $b = g * a$. Por tanto, $g^{-1} * b = g^{-1}(g * a) = (g^{-1} + g) * a = 1_G * a = a$. Se concluye que $b \sim a$.

3. $\sim$ **es transitiva:**
   Supongamos que $a \sim b$ y que $b \sim c$. O sea que $b = g * a$ y $c = h * b$ para ciertos $g, h \in G$.
   $c = h * b = h * (g * a) = (h + g) * a$ y como $h + g \in G$, es claro que $a \sim c$.

Como $\sim$ es una relación de equivalencia, se puede definir el siguiente conjunto cociente:

$$X/\sim = \{[a] : a \in X\}.$$

$$[a] = \{b \in X : a \sim b\} = \{b \in X : \text{ existe algún } g \in G \text{ tal que } b = g*a\} = \{g*a : g \in G\} = O_G(a).$$

La clase de equivalencia de cualquier elemento de X no es más que su orbita bajo la acción de G. Se sabe que las clases de equivalencia de dos elementos distintos son iguales o disjuntas. Por tanto, nuestra prueba está completa. ■

La demostración anterior deja información acerca de $X/\sim$. Este último puede ser reescrito como sigue:

$$X/\sim = \{O_G(a) : a \in X\}.$$

Es por eso que $X/\sim$ es conocido como el espacio de orbitas de la acción de G sobre el G-conjunto X. Dicho nombre con esa notación será usado en este escrito para hacer referencia al conjunto

$$\{O_G(A) : a \in X\}$$

para cualquier grupo G y G-conjunto.

Teorema 8 *Sean G un grupo y X un G-conjunto. G_a es un subgrupo de G para cada $a \in X$.*

Definición 9 *Sean G un grupo y X un G-conjunto bajo la acción * :*

1. *Se dice que un elemento $a \in X$ es un punto fijo de la acción si $G_a = G$.*
2. *Se dice que la acción es libre si $G_a = \{1_G\}$ para cada $a \in X$.*

Teorema 10 *Sean $(G, +)$ un grupo, X un G-conjunto mediante la acción $*$ y α cualquier elemento de X. Si la acción es libre, entonces G está en biyección con $O_G(\alpha)$.*

Demostración.
Definamos la función:

$$f : G \to O_G(\alpha)$$

$$g \to g * \alpha.$$

f es función puesto que, por hipótesis, su asignación es correcta y está bien definida. Sólo falta probar que es biyectiva.

1. **f es inyectiva** Si seleccionamos dos elementos $g, h \in G$ tales que $g * \alpha = h*\alpha$, se observa que $\alpha = g^{-1}*(h*\alpha) = (g^{-1}+h)*\alpha$ por lo que $g^{-1}+h \in G_\alpha$. Como la acción es libre, $G_\alpha = \{1_G\}$ implicandose que $g^{-1} + h = 1_G$ por lo que $g = h$.
2. **f es sobreyectiva** Sea $\beta \in O_G(\alpha)$. $\beta = g*\alpha$ para cierto $g \in G$. Observese que $f(g) = g * \alpha = \beta$

■

3. Acciones hamiltonianas en variedades tóricas

Sea $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en todo su dominio. Denotaremos a su vector gradiente como $dH = \frac{\partial H}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial H}{\partial y_1}dy_1 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial H}{\partial y_n}dy_n$.

Ahora consideremos a un campo vectorial arbitrario $X = f_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + f_{21}\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots f_{1n}\frac{\partial}{\partial x_n} + f_{2n}\frac{\partial}{\partial y_n} \in \mathbb{R}^{2n}$ y evaluemoslo con cualquier otro vector en la función ω :

$$\omega(X, *) = \sum_{k=1}^{n} dx_i \wedge dy_i(X, *)$$

$$\omega(X, *) = \sum_{k=1}^{n} dx_i \wedge dy_i\big(f_{11}\frac{\partial}{\partial x_1} + f_{21}\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots f_{1n}\frac{\partial}{\partial x_n} + f_{2n}\frac{\partial}{\partial y_n}, *\big)$$

$$\omega(X, *) = f_{11}dy_1 - f_{21}dx_1 - \cdots f_{1n} * dy_n - f_{2n} * dx_n$$
$$\omega(X, *) = -f_{21}dx_1 + f_{11}dy_1 - \cdots - f_{2n}dx_n + f_{1n}dy_n$$

Considerando a una función diferenciable $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$; se tiene que $\omega(X, *) = dH$ si y solo si:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = -f_{21},\ \frac{\partial H}{\partial y_1} = f_{11},\ \cdots,\ \frac{\partial H}{\partial x_n} = -f_{2n},\ \frac{\partial H}{\partial y_n} = f_{1n}.$$

Para cada función diferenciable H existe un campo de vectores X tal que $\omega(X, *) = dH$. El reciproco no siempre es cierto: existen campos vectoriales para los cuales no existe alguna función H tal que $\omega(X, *) = dH$. Los campos que si cumplen con el reciproco tienen un nombre especial que se enuncia a continuación:

Definición 11 *Sea $X \in \mathbb{R}^{2n}$ un campo vectorial. Se dice que dicho campo es **hamiltoniano** si existe una función diferenciable $H : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $\omega(X, *) = dH$. Las ecuaciones formadas: $\frac{\partial H}{\partial x_1} = -f_{21},\ \frac{\partial H}{\partial y_1} = f_{11},\ \cdots,\ \frac{\partial H}{\partial x_n} = -f_{2n},\ \frac{\partial H}{\partial y_n} = f_{1n}$, son las ecuaciones de Hamilton.*

Con esta primera definición y las otras que se darán a continuación, se prepara el terreno sobre el que se trabajará a lo largo de este trabajo.

Definición 12 ***(Acción hamiltoniana)***

Sea $G \subseteq \mathbb{R}^k$ un grupo que actúa sobre $\mathbb{R}^{2n}$ mediante la acción $*$. Fijemos un elemento $x \in \mathbb{R}^{2n}$ y definamos la función

$$f : G \to \mathbb{R}^{2n}$$

$$t \mapsto t * x.$$

Ahora consideremos que f es diferenciable en cierto punto p y denotemos a $\nabla f(p)$ como X.

Se dice que $*$ es una ***acción hamiltoniana*** *si existe una función diferenciable $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ tal que $\omega(X, *) = dH$*

Definición 13 *Sea M un espacio topológico. Se dice que M es una* ***variedad topológica*** *si es de Hausdorff y cada punto $p \in M$ está contenido en algún abierto que sea homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Si el n es el mismo para cada $p \in M$, entonces se dice que M es una* ***n-variedad****.*

Definición 14 *Una* ***variedad simpléctica tórica*** *es una variedad simpléctica compacta y conexa (M, ω) equipada con una acción hamiltoniana de un toro $\mathbb{T}^n$ cuya dimensión es igual que la mitad de la dimensión de la variedad.*

$$dimM = 2dim\mathbb{T}^n$$

.

A cada variedad simpléctica tórica se le puede asociar una única función $\mu : M \to \mathbb{R}^n$ tal que $\mu(M)$ es un politopo de Delzant en $\mathbb{R}^n$. Una pregunta natural podría ser la siguiente: ¿si a cada variedad tórica se le puede asociar un politopo de Delzant, a cada uno de estos últimos se le puede asociar una variedad simpléctica tórica? En caso de que la respuesta sea afirmativa, ¿dicha variedad es única?

Dichas preguntas han sido contestadas por el siguiente teorema:

Teorema 15 ***(Delzant)***
Las variedades simplécticas tóricas pueden ser clasificadas por los politopos de Delzant. El conjunto de las variedades simplécticas tóricas está en biyección con el conjunto de los politopos de Delzant. Dicha biyección se describe a continuación:

$$f : \{\textit{Variedades simplécticas tóricas}\} \to \{\textit{Politopos de Delzant}\}$$

$$(M^{2n}, \omega, \mathbb{T}^n, \mu) \mapsto \mu(M)$$

Ejemplo $\mathbb{CP}^2$:

A continuación, se estudiará a la variedad simpléctica tórica $\mathbb{CP}^2$ y su correspondiente acción hamiltoniana mediante el estudio de los puntos fijos de la acción y del estabilizador de cada punto.

Definición 16 *Definamos la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{C}^3 - \{0\}$. Sean $u, v \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$. $u \sim v$ si y solo si existe algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $u = \lambda v$. El conjunto de clases de equivalencia es:*

$$\mathbb{CP}^2 = \{[v] : v \in \mathbb{C}^3 - \{0\}\}.$$

Analizando como son las clases de equivalencia podemos dar una definicion equivalente al plano proyectivo complejo de dimensión 2:

$$\mathbb{CP}^2 = \{\text{Subespacios complejos de dimensión 1 en } \mathbb{C}^3 - \{0\}\}.$$

A los elementos de $\mathbb{CP}^2$ se les conoce como coordenadas homogeneas y tienen la forma $[V_0, V_1, V_2]$ en donde $(V_0, V_1, V_2) \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$. Debido a la relación de equivalencia previamente definida, $[V_0, V_1, V_2] = [\lambda V_0, \lambda V_1, \lambda V_2]$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

En $\mathbb{CP}^2$ actúa un toro de dimensión 2 bajo la operación que se describe a continuación:

$$* : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^2$$

$$* : ((e^{2\pi t_1}, e^{2\pi t_2}), [Z_0, Z_1, Z_2]) \mapsto [Z_0, e^{2\pi t_1} Z_1, e^{2\pi t_2} Z_2].$$

Estudiaremos esta acción encontrando los puntos fijos y los estabilizadores de cada elemento de $\mathbb{CP}^2$.

Puntos fijos

Para encontrar los puntos fijos de esta acción hamiltoniana hay que encontrar las coordenadas homogeneas $[Z_0, Z_1, Z_2]$ tales que $[Z_0, e^{2\pi t_1} Z_1, e^{2\pi t_2} Z_2] = [Z_0, Z_1, Z_2]$ para cada $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. También está el hecho de que $[Z_0, Z_1, Z_2] = [\lambda Z_0, \lambda Z_1, \lambda Z_2]$ para cada $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ de tal manera que las coordenadas buscadas tienen que cumplir que $[Z_0, e^{2\pi t_1} Z_1, e^{2\pi t_2} Z_2] = [\lambda Z_0, \lambda Z_1, \lambda Z_2]$ para cada $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Así pues, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

(1) $Z_0 = \lambda Z_0$

(2) $e^{2\pi t_1} Z_1 = \lambda Z_1$

(3) $e^{2\pi t_2} Z_2 = \lambda Z_2$

De la ecuación (1) se tiene que $Z_0 = 0$ o $\lambda = 1$ pudiendo ser $Z_0 \neq 0$. Dividiremos el problema en dos casos:

(a) **Caso** $\lambda = 1$

Se tiene que $Z_1 = e^{2\pi i t_1} Z_1$ y $Z_2 = e^{2\pi i t_2} Z_2$. Si $Z_1 \neq 0$, entonces $e^{2\pi i t_1} = 1$ por lo que $G([[Z_0, Z_1, Z_2]) \neq G$ ya que, por ejemplo, el elemento $e^i \neq 1$ no sería elemento de $G([Z_0, Z_1, Z_2])$.

Analogamente, Z_2 también debe de ser igual a 0 por que lo que $Z_0 \neq 0$ implicandose así que un punto fijo de la acción es el elemento $[Z_0, 0, 0]$.

(b) **Caso** $Z_0 = 0$

en este caso $Z_1 \neq 0$ o $Z_2 \neq 0$. Supongamos que $Z_1 \neq 0$; se tiene de la ecuación (2) que $\lambda = e^{2\pi t_1}$ implicandose así que $Z_2 = 0$ ya que de no ser así, $e^{2\pi i t_1} = e^{2\pi i t_2}$ por lo que $G([[Z_0, Z_1, Z_2]) \neq G$. Se ha llegado a que otro punto fijo de la acción es $[0, Z_1, 0]$.

Si suponemos que $Z_1 = 0$, un procedimiento análogo al anterior prueba que $\lambda = e^{2\pi i t_2}$ por lo que se obtendría otro punto fijo de la forma $[0, 0, Z_2]$.

Como ya se han contemplado todas las posibilidades, se concluye que los únicos puntos fijos de la acción son los de la forma $[Z_0, 0, 0], [0, Z_1, 0]$ y $[0, 0, Z_2]$. Como $[V_0, V_1, V_2] = [\lambda V_0, \lambda V_1, \lambda V_2]$, se puede decir que los unicos puntos fijos de la acción son $[1, 0, 0], [0, 1, 0]$ y $[0, 0, 1]$.

Esta variedad tórica está asociada a la siguente función momento:

$$\mu : \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$[v_0 : v_1 : v_2] \mapsto \left(\frac{|V_0|^2}{|V_0|^2 + |V_1|^2 + |V_2|^2}, \frac{|V_1|^2}{|V_0|^2 + |V_1|^2 + |V_2|^2} \right)$$

Notemos que $\mu[1, 0, 0] = (1, 0)$; $\mu[0, 1, 0] = (0, 1)$; y que $\mu[0, 0, 1] = (0, 0)$. Dichos puntos son los extremos del politopo de Delzant asociado a esta variedad y en virtud de lo que vimos anteriormente, se puede decir que esos tres puntos son los unicos invariantes ante la acción del toro. Lo último no es nada trivial: **en toda variedad tórica, cada uno de los puntos asociados a algún extremo de su correspondiente politopo son los únicos que permanecen fijos ante la acción del correspondiente toro asociado a dicha variedad**.

Teorema 17 *Sea* $(M^{2n}, \omega, \mathbb{T}^n, \mu)$ *una variedad simpléctica tórica.* $p \in M$ *es un punto fijo ante la acción hamiltoniana del toro* $\mathbb{T}^n$ *si y solo si* $\mu(p)$ *es algún extremo del politopo* $\mu(M)$.

Los politopos dicen mucho acerca de la variedad simpléctica tórica a la que están asociada. Un cambio en la variedad se ve reflejado en su politopo y viceversa; dichos cambios son más notorios cuando se efectuan por la acción del toro asociado a la variedad. Si consideramos la función $f : M^{2n} \mapsto \mu(M)$ y evaluamos las imagenes inversas de cada $p \in \mu(M)$, se obtiene mucha información acerca de la estructura y forma de M^{2n}.

Recordemos que $\mu(\mathbb{CP}^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x,\ y,\ x+y \in [0, 1]\}$. Dicho politopo es un triángulo rectángulo isosceles cuyos extremos son los puntos $(0, 0), (0, 1)$ y $(1, 0)$. Antes de obtener los estabilizadores de los elementos de $\mathbb{CP}^2$, veremos como son las imagenes inversas de los tres tipos de puntos presentes en $\mu(\mathbb{CP}^2)$: vertices, puntos en las aristas y puntos interiores.

1. **Vertices**:
   Solo se calculará el estabilizador del vertice (1,0), el procedimiento para los otros dos vertices es análogo.

   $\mu^{-1}(1,0) = \{[V_0 : V_1 : V_2] : \frac{|V_0|^2}{|V_0|^2+|V_1|^2+|V_2|^2} = 1, \frac{|V_1|^2}{|V_0|^2+|V_1|^2+|V_2|^2} = 0\}$.

   Lo anterior deja un sistema de ecuaciones a resolver:

   a) $\frac{|V_0|^2}{|V_0|^2+|V_1|^2+|V_2|^2} = 1$
   b) $\frac{|V_1|^2}{|V_0|^2+|V_1|^2+|V_2|^2} = 0$

   De la ecuación b) se tiene que $V_1 = 0$ por lo que al reemplazar en a) queda: $|V_0|^2 = |V_0|^2 + |V_2|^2$ implicandose que V_2 también es 0. Por tanto: $\mu^{-1}(1,0) = \{[V_0 : 0 : 0] : V_0 \in \mathbb{C} - \{0\}\} = \{[1 : 0 : 0]\}$

   Con el mismo procedimiento se obtiene que $\mu^{-1}(0,1) = \{[0 : 1 : 0]\}$ y $\mu^{-1}(0,0) = \{[0 : 0 : 1]\}$ por lo que se concluye que la imagen inversa de cada extremo del politopo solamente representa a un solo punto de $\mathbb{CP}^2$.

2. **Puntos en las aristas:** Se calculará la imagen inversa de un punto arbitrario de la arista localizado en la recta de ecuación $y = 1 - x$. Los resultados obtenidos serán iguales para las otras 2 aristas.

   Sea $(x, 1-x) \in \mu(\mathbb{CP}^2)$ un elemento arbitrario para cierto $x \in (0,1)$. $\mu^{-1}(x, 1-x) = \{[V_0 : V_1 : V_2] : \frac{|V_0|^2}{|V_0|^2+|V_1|^2+|V_2|^2} = x, \frac{|V_1|^2}{|V_0|^2+|V_1|^2+|V_2|^2} = 1 - x\}$.

   Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

   a) $\frac{|V_0|^2}{|V_0|^2+|V_1|^2+|V_2|^2} = x$
   b) $\frac{|V_1|^2}{|V_0|^2+|V_1|^2+|V_2|^2} = 1 - x$

   Sumando las ecuaciones anteriores se tiene que $\frac{|V_0|^2+|V_1|^2}{|V_0|^2+|V_1|^2+|V_2|^2} = 1$ por lo que $|V_0|^2 + |V_1|^2 = |V_0|^2 + |V_1|^2 + |V_2|^2$ implicandose que $V_2 = 0$.

   Con lo anterior, la ecuación (a) queda como $\frac{|V_0|^2}{|V_0|^2+|V_1|^2} = x$ quedando $(1-x)|V_0|^2 = x|V_1|^2$. Sin perdida de la generalidad, supongamos que $V_1 \neq 0$ para finalmente obtener $\frac{|V_0|^2}{|V_1|^2} = \frac{x}{1-x}$. Como $x \in (0,1)$, $1-x \in (0,1)$ por lo que $\frac{x}{1-x} > 0$ y $V_0 \neq 0$.

Supongamos que $V_0/V_1 = a + ib$. Entonces $a^2 + b^2 = \frac{x}{1-x}$. La división que realizamos sobre V_0 también se hará sobre el mismo V_1 para ya obtener una expresión aceptable de la imagen inversa buscada.

$\mu^{-1}(x, 1-x) = \{[V_0 : V_1 : 0] : \frac{|V_0|^2}{|V_1|^2} = \frac{x}{1-x}, V_1 \neq 0\} = \{[a + ib : 1 : 0] : a^2 + b^2 = \frac{x}{1-x}\} \cong \mathbb{S}^1$.

La imagen inversa de cualquier punto contenido en el contorno del triángulo es una circunferencia.

3. **Puntos interiores**:

Sea $(x, y) \in \mu(\mathbb{CP}^2)$ tal que x, y, $x + y \in (0, 1)$.

$\mu^{-1}(x, y) = \{[V_0 : V_1 : V_2] : \frac{|V_0|^2}{|V_0|^2+|V_1|^2+|V_2|^2} = x, \frac{|V_1|^2}{|V_0|^2+|V_1|^2+|V_2|^2} = y\}$.

Se tienen las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{|V_0|^2}{|V_0|^2+|V_1|^2+|V_2|^2} = x$

b) $\frac{|V_1|^2}{|V_0|^2+|V_1|^2+|V_2|^2} = y$

De la ecuación (a) se tiene que $|V_0|^2 + |V_1|^2 + |V_2|^2 = \frac{|V_0|^2}{x}$ y de la ecuación (b) se llega a que $|V_0|^2 + |V_1|^2 + |V_2|^2 = \frac{|V_1|^2}{y}$ por lo que $\frac{|V_0|^2}{x} = \frac{|V_1|^2}{y}$. Supongamos que $V_1 \neq 0$ y despejemos la ecuación anterior para llegar a $\frac{|V_0|^2}{|V_1|^2} = \frac{x}{y}$. Sea $a + ib = \frac{V_0}{V_1}$ de tal manera que $a^2 + b^2 = \frac{x}{y}$.

Por otro lado: $\frac{|V_0|^2+|V_1|^2}{|V_0|^2+|V_1|^2+|V_2|^2} = x + y$,

$$|V_0|^2 + |V_1|^2 = (x + y) * (|V_0|^2 + |V_1|^2 + |V_2|^2),$$

$$(|V_0|^2 + |V_1|^2)(1 - x - y) = (x + y) * |V_2|^2,$$

$$(|V_0|^2 + |V_1|^2)(1 - x - y) = \frac{|V_0|^2 + |V_1|^2}{|V_0|^2 + |V_1|^2 + |V_2|^2} * |V_2|^2,$$

y como $V_1 \neq 0$, se tiene que:

$$\frac{|V_2|^2}{|V_0|^2 + |V_1|^2 + |V_2|^2} = 1 - x - y$$

por lo que

$$\frac{|V_1|^2 + |V_2|^2}{|V_0|^2 + |V_1|^2 + |V_2|^2} = 1 - x,$$

$$\frac{|V_1|^2+|V_2|^2}{1-x}=|V_0|^2+|V_1|^2+|V_2|^2,$$

y como $|V_0|^2+|V_1|^2+|V_2|^2=\frac{|V_1|^2}{y}$, se llega a que

$$\frac{|V_1|^2+|V_2|^2}{1-x}=\frac{|V_1|^2}{y}$$

$$y(|V_1|^2+|V_2|^2)=(1-x)|V_1|^2$$

$$|V_1|^2(x+y-1)=-y|V_2|^2$$

$$\frac{|V_2|^2}{|V_1|^2}=\frac{y}{1-x-y}$$

Sea $c+id=\frac{V_2}{V_1}$ de tal manera que $c^2+d^2=\frac{y}{1-x-y}$.

Con todo lo anterior se tiene que

$$\mu^{-1}(x,y)=\big\{[V_0,V_1,V_2]:V_1\neq 0,\ \frac{|V_0|^2}{|V_1|^2}=\frac{x}{y},\ \frac{|V_2|^2}{|V_1|^2}=\frac{y}{1-x-y}\big\}$$

$$\mu^{-1}(x,y)=\big\{[a+ib,1,c+id]:a^2+b^2=\frac{x}{y},\ c^2+d^2=\frac{y}{1-x-y}\big\}$$

Es notorio el hecho de que $\mu^{-1}(x,y)\cong\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1=\mathbb{T}^2$. la imagen inversa de cualquier punto del interior del triángulo es un toro de dimensión 2.

Estabilizadores

Sabiendo que solo hay tres tipos de puntos en el politopo $\mu(\mathbb{CP}^2)$ (los puntos interiores, los puntos sobre las aristas y los vertices) se puede afirmar que los subconjuntos propios de $\mathbb{CP}^2$ se dividen en tres categorias: puntos, circunferencias y toros de dimensión 2. Como los puntos están asociados a los extremos del politopo $\mu(\mathbb{CP}^2)$, el estabilizador de cada punto es $\mathbb{S}^1$, esto es equivalente a lo que se obtuvó al calcular los puntos fijos de la acción. Ya solo queda calcular el estabilizador de los puntos contenidos en alguna circunferencia y de los puntos contenidos en algún toro de dimensión 2.

1. **Punto en una circunferencia** 2

   Sea $[a+ib:1:0]\in\mathbb{CP}^2$ un elemento tal que $a,b\in\mathbb{R}$ y $a^2+b^2=p$ para cierto $p>0$.

   $$G_{[a+ib:1:0]}=\{(e^{2\pi it_1},e^{2\pi it_2}):(e^{2\pi it_1},e^{2\pi it_2})*[a+ib:1:0]=[a+ib:1:0]\}$$

   $$G_{[a+ib:1:0]}=\{(e^{2\pi it_1},e^{2\pi it_2}):[(a+ib):(e^{2\pi it_1})*1:(e^{2\pi it_2})*0]=[a+ib:1:0]\}$$

   Se tienen las ecuaciones:

a) $e^{2\pi i t_1} * 1 = 1$

b) $e^{2\pi i t_2} * 0 = 0$

De la primera ecuación se tiene que $e^{2\pi i t_1} = 1$ y de la segunda se comcluye que $e^{2\pi i t_2}$ puede ser cualquier número complejo con norma 1. Por tanto:

$$G_{[a+ib:1:0]} = \{(1, e^{2\pi i t_2}) : e^{2\pi i t_2} \in \mathbb{S}^1\} \cong \mathbb{S}^1$$

El estabilizador de los puntos de una circunferencia también es una circunferencia.

2. **Punto en un toro de dimensión** 2

   Sea $[a+ib : 1 : c+id] \in \mathbb{CP}^2$ un elemento arbitrario en donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $a^2 + b^2 = p$, $c^2 + d^2 = q$ para ciertos $p, q > 0$.

   $G_{[a+ib:1:c+id]} = \{(e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2}) : (e^{2\pi t_1}, e^{2\pi t_2}) * [a+ib, 1, c+id]) = [a+ib, 1, c+id].\}$

   $G_{[a+ib:1:c+id]} = \{(e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2}) : [a+ib, (e^{2\pi i t_1})1, (e^{2\pi i t_2})c+id] = [a+ib, 1, c+id]\}$

   Tenemos las siguientes ecuaciones:

   a) $e^{2\pi i t_1} * 1 = 1$

   b) $e^{2\pi i t_2} * (c + id) = c + id$

   Como 1 y $c + id$ son números complejos diferentes de 0, se tiene que $e^{2\pi i t_1} = e^{2\pi i t_2} = 1$ por lo que

   $$G_{[a+ib:1:c+id]} = 1_{S^1 \times S^1} = \{(1, 0), (1, 0)\}$$

   El estabilizador de los puntos de un toro es 1_{S^1}

Vamos a sintetizar lo anterior pero observandolo desde el politopo:

1. El estabilizador de los vertices es $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
2. El estabilizador de los puntos de las aristas (excluyendo los vertices) es $\mathbb{S}^1$
3. El estabilizador de los puntos del interior es ((0,1),(0,1)) (un único punto).

4. Reducción simpléctica en espacios vectoriales simplécticos

Definición 18 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable. Los puntos $p \in A$ y $f(p) \in f(A)$ son regulares si $\dot{f}(p) \neq 0$. En caso contrario, se dice que p y $f(p)$ son puntos críticos.*

Método de reducción simpléctica

Este método permite, a partir de algún $\mathbb{R}^{2n}$, construir conjuntos de menor dimensión a los que se les puede asociar una forma simpléctica. En este trabajo se desarrollará el método hasta la parte en donde se obtiene el conjunto de menor dimensión(la cual siempre será par). El resto del procedimiento se ocupa en demostrar que el conjunto obtenido de dimensión par si es un espacio vectorial simpléctico; dicha parte no será tocada puesto que se escapa de las herramientas expuestas en este trabajo. Aun así, el lector debería de estar confiado en que todo lo mostrado aqui será correcto aunque esté incompleto. Recuerdese que una condición necesaria, pero no suficiente, para que un espacio vectorial sea simpléctico es que este sea de dimensión par. La parte del método que nos concierne será expuesta a continuación:

1. Consideremos a un grupo $G \subseteq \mathbb{R}^k$ que actúa sobre el espacio vectorial simpléctico $\mathbb{R}^{2n}$ mediante la acción hamiltoniana $*$.

2. Fijemos un elemento $x \in \mathbb{R}^{2n}$ y definamos la función
$$f : G \to \mathbb{R}^{2n}$$
$$t \mapsto t * x.$$

3. Supongamos que la función f es diferenciable y evaluemos su vector gradiente en la forma simpléctica usual de $\mathbb{R}^{2n} : \omega(X, *)$, para así obtener las ecuaciones de Hamilton asociadas a dicho campo vectorial.

4. Se soluciona el sistema de ecuaciones planteado para asi obtener la función hamiltoniana $H : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}$ asociada a la acción.

5. Se obtienen los puntos regulares de la función H y se procede a obtener la imagen inversa de uno de ellos.

6. Se obtiene el espacio de orbitas de la acción sobre dicha imagen inversa (como la acción es hamiltoniana, la imagen inversa de todo punto regular es invariante ante la acción *)

   Dicho espacio de orbitas será de dimensión par y en los ejemplos que se darán, serán homeomorfos a espacios vectoriales de dimensión par muy conocidos ($\mathbb{R}^{2m}$ y $\mathbb{S}^2$). Lo que sigue del procedimiento es mostrar que dichos espacios de orbitas son espacios vectoriales simplécticos.

Ahora aplicaremos el método de reducción simpléctica en los siguientes dos espacios vectoriales: $\mathbb{R}^{2n}$ y $\mathbb{C}^2$. Con ello se obtendrá el espacio de orbitas de la acción sobre la imagen inversa de cierto punto regular via la función hamiltoniana asociada. Dicho espacio de orbitas será homeomorfo a una variedad simpléctica de menor dimensión que la original ($\mathbb{R}^{2n}$ o $\mathbb{C}^2$).

Ejemplo $\mathbb{R}^{2n}$:

Sean $G = \mathbb{R}^k,\ X = \mathbb{R}^{2n}$ y $n > k$. Definamos la siguiente acción:

$$* : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$$

$$* : \big((t_1, ..., t_k), (x_1, y_1, ..., x_n, y_n)\big) \mapsto (x_1{+}t_1, y_1, ..., x_k{+}t_k, y_k, x_{k+1}, y_{k+1}, ..., x_n, y_n)$$

Estabilizadores de la acción:
Sea $x \in \mathbb{R}^{2n}$ un elemento arbitrario pero fijo. En el estabilizador de x estarán todos los elementos $\vec{t} \in \mathbb{R}^k$ tales que $\vec{t}*\vec{x} = \vec{x}$. O lo que es igual, todos los elementos $(t_1, ...t_k)$ tales que $(t_1 + x_1, y_1, ..., t_k + x_k, y_k, ..., x_n, y_n) = (x_1, y_1, ..., x_k, y_k)$. Lo último nos deja planteado k ecuaciones lineales de la forma: $t_i + x_i = x_i, i \in \{1, ..., k\}$.

Resolviendo cada ecuación se obtiene que $t_i = 0$ para cada $i \in \{1, ..., k\}$ por lo que $G_x = (0, 0, ..,0) = 0$ para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^{2n}$. Con esto se concluye que la acción es libre por lo que no hay puntos fijos.

Ecuaciones de Hamilton asociadas a la acción

Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ un elemento fijo. Definamos las siguientes k funciones:

$$f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$$

$$t \mapsto (x_1, y_1, \cdots, t + x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}, \cdots, x_n, y_n)$$

$\dot{f}(t) = (0, 0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ en donde 1 está ubicado en la i-esima posición. Por tanto, $\dot{f}_i = X_{H_i} = 1 * \frac{\partial}{\partial x_i}$ y evaluando este campo vectorial en la forma simpléctica ω, se tiene que $\omega(X_{H_i}, *) = dy_i$. Es por tanto $\frac{\partial H_i}{\partial y_i} = 1$ por lo que la funcion hamiltoniana H_i será $H_i(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n) = y_i$

Ahora consideremos la siguiente función:

$$H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^k$$

$$\vec{x} \mapsto (H_1(\vec{x}), H_2(\vec{x}), \cdots, H_k(\vec{x}))$$

$$\vec{x} \mapsto (y_1, y_2, \cdots, y_k)$$

Consideremos el elemento $\vec{0} \in \mathbb{R}^k$ y analizemos el conjunto de orbitas de la acción de este último grupo sobre el conjunto $H^{-1}(\vec{0})$.

Sea $\vec{x} \in H^{-1}(\vec{0})$ un elemento arbitrario.

$$O_{\mathbb{R}^k}(\vec{x}) = \{(x_1 {+} t_1, 0, x_2 {+} t_2, 0, \cdots, x_k {+} t_k, 0, x_{k+1}, y_{k+1}, \cdots, x_n, y_n) : \ \ t_i \in \mathbb{R}\ \}$$

$$O_{\mathbb{R}^k}(\vec{x}) = \{(\alpha_1, 0, \alpha_2, 0, \cdots, \alpha_k, 0, x_{k+1}, y_{k+1}, \cdots, x_n, y_n) : \quad \alpha_i \in \mathbb{R}\ \}$$

Finalmente:

$$H^{-1}(\vec{0})/\sim = \{O_{\mathbb{R}^k}(\vec{x}) :\ \vec{x} \in H^{-1}(\vec{0})\}.$$

Como cada $O_{\mathbb{R}^k}(\vec{x})$ es una clase de equivalencia, podemos escojer a un representante de cada orbita de tal manera que el espacio de orbitas de la acción tratada se vea como:

$$H^{-1}(\vec{0})/\sim = \{(\alpha_1, 0, \alpha_2, 0, \cdots, \alpha_k, 0, x_{k+1}, y_{k+1}, \cdots, x_n, y_n) : \quad x_i, y_i \in \mathbb{R}\ \}.$$

Es facil notar que $H^{-1}(\vec{0})/\sim$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{2n-2k}$, el cual es un espacio vectorial simpléctico. Con todo esto, hemos visto una aplicación de la reducción simpléctica en donde obtenemos que el espacio de orbitas de la imagen inversa de un punto regular via una funcion hamiltoniana asociada a una variedad tórica es homeomorfo a un espacio vectorial simpléctico.

Ejemplo $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$:

Sean $G = \mathbb{S}^1,\ X = \mathbb{C}^2$ y $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ fijos. Definamos la acción:

$$* : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2.$$

$$* : (e^{2\pi i t}, (z_1, z_2)) \mapsto (e^{2\pi i t r_1} z_1, e^{2\pi i t r_2} z_2).$$

Estabilizadores y puntos fijos

Sea $\vec{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Nos dispondremos a calcular el estabilizador de dicho elemento.

$$G_{\vec{z}} = \{\vec{x} \in \mathbb{S}^1 : \vec{x} * (z_1, z_2) = (z_1, z_2)\}$$
$$\{e^{2\pi i t} \in \mathbb{S}^1 : (e^{2\pi i t r_1} z_1, e^{2\pi i t r_2} z_2) = (z_1, z_2)\}.$$

Con lo anterior se puede formar el siguiente sistema de ecuaciones:

(1) $e^{2\pi i t r_1} z_1 = z_1$

(2) $e^{2\pi i t r_2} z_2 = z_2$

De la ecuación (1) se tiene que $z_1 = 0$ o $e^{2\pi i t r_1} = 1$ pudiendo ser $z_1 \neq 0$. Dividiremos la resolución del sistema en dos casos:

1. **Caso** $z_1 = 0$

   Si $z_2 = 0$, entonces tendríamos que $e^{2\pi i t r_1} * 0 = e^{2\pi i t r_2} * 0 = 0$ por lo que $G_{\vec{z}}(z_1, z_2) = \mathbb{S}^1$.

   Si $z_2 \neq 0$, entonces $e^{2\pi i t r_2} = 1$ por lo que $G_{\vec{z}}(z_1, z_2) = \mathbb{S}^1$ si $r_2 = 0$ ó $G_{\vec{z}}(z_1, z_2) = \{e^{2\pi i \frac{n}{r_2}} : n \in \mathbb{Z}\}$ si $r_2 \neq 0$.

2. **Caso** $z_1 \neq 0$

   Se tiene que $e^{2\pi i t r_1} = 1$.

   Si $z_2 = 0$, entonces $G_{\vec{z}}(z_1, z_2) = \mathbb{S}^1$ si $r_1 = 0$ ó $G_{\vec{z}}(z_1, z_2) = \{e^{2\pi i \frac{n}{r_1}} : n \in \mathbb{Z}\}$ si $r_1 \neq 0$.

   Si $z_2 \neq 0$, entonces el sistema de ecuaciones quedará como sigue:

   a) $e^{2\pi i t r_1} = 1$
   b) $e^{2\pi i t r_2} = 1$

   Si $r_1 = r_2 = 0$, entonces $G_{\vec{z}} = \mathbb{S}^1$.

   Si $r_1 = 0$ *y* $r_2 \neq 0$, entonces $G_{\vec{z}} = \{e^{2\pi i \frac{n}{r_2}} : n \in \mathbb{Z}\}$.

   Si $r_1 \neq 0$ *y* $r_2 = 0$, entonces $G_{\vec{z}} = \{e^{2\pi i \frac{n}{r_1}} : n \in \mathbb{Z}\}$.

   Si $r_1 \neq 0$ *y* $r_2 \neq 0$, entonces $G_{\vec{z}} = \{e^{2\pi i \frac{n}{MCD(r_1, r_2)}} : n \in \mathbb{Z}\}$.

Del análisis efectuado se puede inferir que los valores de r_1 y r_2 determinan los puntos fijos de la acción. El único punto que siempre es fijo es $\vec{z} = \vec{0} = (0, 0)$

Ecuaciones de Hamilton asociadas a la acción

En esta parte es más conveniente considerar a $\mathbb{S}^1$ como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ para analizar su acción sobre $\mathbb{R}^4$ en vez de hacerlo sobre $\mathbb{C}^2$. Eso facilitará la parte concerniente a cálculo y las correspondientes evaluaciones en la forma simpléctica canónica.

Sean $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4$ y $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ elementos fijos. Definamos la siguiente función:

$$f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^4$$

$$t \mapsto \Big(x_1\cos(2\pi tr_1) - y_1\operatorname{sen}(2\pi tr_1),\ y_1\cos(2\pi tr_1) + x_1\operatorname{sen}(2\pi tr_1),$$

$$x_2\cos(2\pi tr_2) - y_2\operatorname{sen}(2\pi tr_2),\ y_2\cos(2\pi tr_2) + x_2\operatorname{sen}(2\pi tr_2)\Big)$$

$$\dot{f}(t) = \Big(-2\pi x_1 r_1\operatorname{sen}(2\pi tr_1) - 2\pi y_1 r_1\cos(2\pi tr_1),\ -2\pi y_1 r_1\operatorname{sen}(2\pi tr_1) + 2\pi x_1 r_1\cos(2\pi tr_1),$$

$$-2\pi x_2 r_2\operatorname{sen}(2\pi tr_2) - 2\pi y_2 r_2\cos(2\pi tr_2),\ -2\pi y_2 r_2\operatorname{sen}(2\pi tr_2) + 2\pi x_2 r_2\cos(2\pi tr_2)\Big)$$

Consideremos el campo vectorial X_H como $\dot{f}(0)$ debido a que solo nos interesa como se comporta el campo vectorial en el punto (x_1, y_1, x_2, y_2) escojido al principio. Por tanto, se tendrá que:

$$X_H = (-2\pi y_1 r_1,\ 2\pi x_1 r_1,\ -2\pi y_2 r_2,\ 2\pi x_2 r_2)$$

Evaluando el campo vectorial X_H en la función simpléctica ω se tiene que:

$$\omega(X_H, *) = -2\pi y_1 r_1 dy_1 - 2\pi x_1 r_1 dx_1 - 2\pi y_2 r_2 dy_2 - 2\pi x_2 r_2 dx_2$$

Las ecuaciones de Hamilton quedan como siguen:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = -2\pi x_1 r_1,\ \ \frac{\partial H}{\partial y_1} = -2\pi y_1 r_1,\ \ \frac{\partial H}{\partial x_2} = -2\pi x_2 r_2,\ \ \frac{\partial H}{\partial y_2} = -2\pi y_2 r_2.$$

Solucionando dicho sistema de ecuaciones se llega a que la funcion hamiltoniana buscada es: $H(x_1, y_1, x_2, y_2) = -\pi(r_1 x_1^2 + r_1 y_1^2 + r_2 x_2^2 + r_2 y_2^2)$. Supongamos que $r_1 = r_2 = 1$ de tal manera que $H(x_1, y_1, x_2, y_2) = -\pi(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2)$. La función H es definida negativa por lo que $Imf(H) = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$
y su único punto crítico es el $\vec{0} = (0, 0, 0, 0)$

Lo que queda es demostrar que la asignación

$$* : \mathbb{S}^1 \times H^{-1}(\alpha) \to H^{-1}(\alpha)$$

sigue siendo una acción de $\mathbb{S}^1$ sobre un $\mathbb{S}^1$-conjunto para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}^{-1} \cup \{0\}$. Casi todo el trabajo ya está hecho: la asignación está bien definida y $\forall g, h \in G$ y $x \in X$ se cumple que $(g + h) * x = g * (h * x)$ y $1_G * x = x$. Solamente falta corroborar que la asignación es correcta.

Sean $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in H^{-1}(\alpha)$ y $(cos(t), sen(t)) \in \mathbb{S}^1$. Se tiene que:

$$(cos(t), sen(t)) * (x_1, y_1, x_2, y_2) = ((cos(2\pi tr_1), sen(2\pi tr_1))(x_1, y_1), (cos(2\pi tr_2), sen(2\pi tr_2))(x_2, y_2)) = \cdots$$

$$\cdots = (x_1cos(2\pi tr_1) - y_1sen(2\pi tr_1), x_1sen(2\pi tr_1) + y_1cos(2\pi tr_1),$$
$$x_2cos(2\pi tr_2) - y_2sen(2\pi tr_2), x_2sen(2\pi tr_2) + y_2cos(2\pi tr_2)).$$

Es facil verificar que la norma del último vector es igual que la norma del elemento (x_1, x_2, x_3, x_4) por lo que dicho elemento está contenido en $\mathbb{S}^1 \times H^{-1}(\alpha)$ implicandose así que la asignación es correcta. Proseguiremos estudiando a la imagen inversa del punto regular $-\pi < 0$ via la funcion hamiltoniana H:

$$H^{-1}(-\pi) = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4 : -\pi(x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) = -\pi\}.$$

$$H^{-1}(-\pi) = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1\}.$$

$$H^{-1}(-\pi) = \mathbb{S}^3.$$

Consideremos la acción que estudiabamos restringida a $H^{-1}(-\pi)$:

$$* : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3.$$

Sea $\vec{x} \in \mathbb{S}^3$. La orbita de $\vec{x}$ bajo la acción será:

$$O_{\mathbb{S}^1}(\vec{x}) = \{(x_1cos(2\pi t) - y_1sen(2\pi t), x_1sen(2\pi t) + y_1cos(2\pi t),$$
$$x_2cos(2\pi t) - y_2sen(2\pi t), x_2sen(2\pi t) + y_2cos(2\pi t) : t \in [0,1]\}.$$

Es facil observar que existe una biyección entre O_{S^1} y S_1. Más aun, existe un homeomorfismo entre ambos conjuntos. Por tanto, podemos ver al espacio de orbitas $H^{-1}(-\pi)/\sim\ = S^3/\sim$ como S^3/S^1. La 3-esfera puede ser dividida en varias 1-esferas y el número exacto de dichas circunferencias es igual a $|\mathbb{C}| + 1$.

Teorema 19 *Sea*

$$* : \mathbb{S}^{\mathbb{1}} \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$$
$$\big((e^{2\pi it}), (x_1, y_1, x_2, y_2)\big) \mapsto \big(x_1cos(2\pi t) - y_1sen(2\pi t), x_1sen(2\pi t) + y_1cos(2\pi t)$$
$$x_2cos(2\pi t) - y_2sen(2\pi t), x_2sen(2\pi t) + y_2cos(2\pi t)\big).$$

Una acción de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^3$. Se tiene que $\mathbb{S}^3/\sim$ está en biyección con $\mathbb{CP}^{\mathbb{1}}$.

Demostración.
Sea

$$f : \mathbb{S}^3/\sim\ \to\ \mathbb{CP}^{\mathbb{1}}.$$

$$O_{\mathbb{S}^1}(x) \mapsto [x] = \{\lambda * x : \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}\}$$

1. **f es una función:** Por construcción, la asignación es correcta. Solo falta ver que f está bien definida. Consideremos a cualesquiera par de elementos $x, y \in \mathbb{S}^3$ tales que $O_{\mathbb{S}^1}(x) = O_{\mathbb{S}^1}(y)$. Hay que demostrar que $[x] = [y]$.

   Sea $a \in [x]$, $a = \lambda x$ para cierto $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Por hipótesis, $x = \alpha y$ para cierto $\alpha \in \mathbb{S}^1$ por lo que $a = \lambda x = \lambda(\alpha y) = (\lambda\alpha)y$ por lo que se concluye que $a \in [y]$ implicandose así que $[x] \subseteq [y]$. Un procedimiento análogo muestra que $[y] \subseteq [x]$ por lo que $[x] = [y]$.

2. **f es una función inyectiva**
   Sean $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{S}^3$ tales que $[x] = [y]$. Hay que demostrarque $O_{\mathbb{S}^1}(x) = O_{\mathbb{S}^1}(y)$.

   Sea $a \in O_{\mathbb{S}^1}(x)$. $a = \lambda x$ para cierto $\lambda \in \mathbb{S}^1$; por hipótesis, $x = \beta y$ en donde $\beta \in \mathbb{C}$. Para poder proseguir se demostrará que $|\beta| = 1$. Como $x = \beta y$, Se tiene que

   $$\begin{aligned} x &= \big((x_1, x_2), (x_3, x_4)\big) \\ &= \big((\beta(y_1, y_2)), (\beta(y_3, y_4)\big) \end{aligned}$$

   Por tanto:

   $$|x| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2) + (x_3^2 + x_4^2)}$$
   $$\sqrt{|\beta|^2(y_1^2 + y_2^2) + |\beta|^2(y_3^2 + y_4^2)} =$$
   $$\sqrt{|\beta|^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)} =$$
   $$|\beta|\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2} =$$
   $$|\beta||y|$$

   Y como $|x| = |y| = 1$, se sigue que $|\beta| = 1$.

   Con todo lo anterior, se tiene que $a = \lambda(\beta y) = (\lambda\beta)y$ por lo que $|a| = 1 * |y| = |y|$ implicandose así que $a \in O_{\mathbb{S}^1}(y)$. Es por tanto, $O_{\mathbb{S}^1}(x) \subseteq O_{\mathbb{S}^1}(y)$.

   Un procedimiento como el anterior muestra que $O_{\mathbb{S}^1}(y) \subseteq O_{\mathbb{S}^1}(x)$ por lo que $O_{\mathbb{S}^1}(y) = O_{\mathbb{S}^1}(x)$.

3. **f es una función sobreyectiva**

   Sea $x \in \mathbb{S}^3$ tal que $[x] \in \mathbb{CP}^1$. Observemos que al ser $x \in \mathbb{S}^3$, $f(O_{\mathbb{S}^1}(x)) = [x]$.

Con todo lo anterior se ve que f es una función biyectiva por lo que $\mathbb{S}^3/\sim = \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ está en biyección con $\mathbb{CP}^1$.

■

Al igual que en el ejemplo anterior, el espacio de orbitas de la imagen inversa de un punto regular via una función hamiltoniana asociada a una espacio vectorial simpléctico es de dimensión par. Lo último tiene dos justificaciones: $\mathbb{CP}^{\mathbb{1}}$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^2$ por lo que al igual que este último, es de dimensión par. Además, $\mathbb{S}^2$ es homeomorfo a $\mathbb{C} \cup \{punto\}$, el cual tiene una dimensión $n = dim(\mathbb{C} \cup \{punto\}) = dim(\mathbb{C}) + dim(\{punto\}) = 2 + 0 = 2$.

El último resultado de la sección anterior es muy especial debido a que otorga una importante interpretación de la 3-esfera. Dicha esfera puede ser vista como una 2-esfera en donde cada punto de ella ha sido reemplazado por una 1-esfera. En efecto, se demostró que $\mathbb{S}^3$ puede ser partido en clases de equivalencias homeomorfas a $\mathbb{S}^1$ y que el conjunto cociente $\mathbb{S}^3/\sim$ está en biyección con $\mathbb{S}^2$. El hecho de que $\mathbb{S}^3/\sim\ \cong \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^2$ está motivado y sustentado por lo dicho con anterioridad. Heinz Hopf fue quien descubrio esta forma de descomponer a la 3-esfera en el marco de lo que ahora se denomina fibración de Hopf.

A continuación se dará una breve descripción de la fibración de Heinz Hopf para la 3-esfera:
Consideremos a $\mathbb{C}^2$ como un plano con 2 ejes perpendiculares: el eje Z_1 y el eje Z_2. Dichos ejes son rectas complejas o, lo que es igual, planos reales. Ahora consideremos a todas las rectas complejas que pasan por el origen coordenado, eso es: a todas las rectas de la forma $z_2 = a * z_1$ en donde $Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C} \cup \{\text{ínf}\}$. Dichas rectas solo se intersectan en el origen coordenado y la intersección de cada recta con $\mathbb{S}^3$ resulta en un conjunto homeomorfo a $\mathbb{S}^1$. Lo anterior será demostrado: sea $a \in \mathbb{C}$. Consideremos a la recta compleja y a la 3-esfera con las ecuaciones correspondientes $Z_2 = a * Z_1$ y $|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = 1$, respectivamente. Procederemos a determinar la intersección de la recta con $\mathbb{S}^3$. Para ello hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

1. $Z_2 = a * Z_1$
2. $|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = 1$

De la ecuación (1) se tiene que $|Z_2| = |a||Z_1|$ por lo que $|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = (|a||Z_1|)^2 + |Z_1|^2 = |Z_1|^2(|a|^2 + 1) = 1$ implicandose así que $|Z_1|^2 = \frac{1}{|a|^2+1}$ y que $|Z_2|^2 = \frac{|a|^2}{|a|^2+1}$. El conjunto solución resulta ser $\{(Z_1, a * Z_1) \in \mathbb{C}^2 : |Z_1|^2 = \frac{1}{|a|^2+1}\} \cong \mathbb{S}^1$. La intersección entre la recta y la 3-esfera es una circunferencia de radio$\frac{1}{\sqrt{|a|^2+1}}$. Cuando se considera la intersección entre la recta $Z_1 = 0$, aquella que no tiene una ecuación de la forma $Z_2 = a * z_1$, se observa que su intersección con $\mathbb{S}^3$ sigue siendo una circunferencia. En efecto, si $Z_1 = 0$, entonces $|Z_1|^2 + |Z_2|^2 = 1$ se convierte en $|Z_2|^2 = 1$ por lo que dicha intersección será el conjunto $\{(0, Z_2) : |Z_2|^2 = 1\} \cong \mathbb{S}^1$.

Con todo lo anterior Heinz Hopf pudó demostrar que cada recta compleja del conjunto $\mathbb{C}^2$ corta a la 3-esfera en una circunferencia $\mathbb{S}^1$; Dichas 1-esferas son ajenas ya que los planos que las contienen también lo son. El conjunto de dichas rectas es $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$ por lo que por cada punto en $\mathbb{S}^2$, existe una circunferencia en $\mathbb{S}^3$ y viceversa. El nombre de fibración está motivado por el hecho de como se ven las 1-esferas en la 3-esfera. Si se piensa en las fibras de un tejido y se observan como estas se relacionan entre si, se puede pensar que $\mathbb{S}^3$ es un tejido cuyas fibras son 1-esferas.

Generalización para todas las esferas de dimensión impar
El procedimiento anterior tuvó dos funciones:

1. Ilustar el método de reducción simpléctica en el espacio vectorial $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ para obtener un espacio de orbitas de dimensión par en donde se induce una forma simpléctica.

2. Dar una demostración de aquello que Hopf demostró en 1931: como una 3-esfera puede descomponerse en muchas 1-esferas; tantas como el número de elementos presentes en la 2-esfera.

Dichos resultados pueden generalizarse para $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ y para todas las esferas de dimensión impar. El procedimiento para ello es totalmente análogo al que se acaba de realizar (el lector puede corroborarlo a manera de ejercicio). En lo que queda, solamente daremos una descripción rapida del método generalizado:

Consideremos el mismo grupo $G = \mathbb{S}^1$, pero ahora sobre el conjunto $X = \mathbb{R}^{2n}$ para definir la acción:

$$* : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}.$$

$$* : (cos(t), sin(t)), (x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n) \mapsto \Big(x_1 \cos(2\pi t) - y_1 \operatorname{sen}(2\pi t),\ y_1 \cos(2\pi t) + x_1 \operatorname{sen}(2\pi tr),$$
$$\cdots, x_n \cos(2\pi t) - y_n \operatorname{sen}(2\pi tr),\ y_n \cos(2\pi t) + x_n \operatorname{sen}(2\pi t) \Big)$$

Considerar la acción sobre $\mathbb{R}^{2n}$ y no sobre $\mathbb{C}^n$ puede traer problemas a la hora de demostrar que $*$ si es una acción debido a que es más facil hacerlo considerando a los elementos de $\mathbb{S}^1$ como potencias del numero e que como una dupla de senos y cosenos. Aun así, considero que el hacerlo de esta forma es beneficioso debido a que deja claro que $\mathbb{C}^n$ se comporta como $\mathbb{R}^{2n}$ a la vez que se recuerdan las formulas del seno y coseno de la suma de ángulos.

Una vez que ya se tiene a la acción $*$ bien estudiada, se procede a fijar un elemento $\vec{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ para definir la función:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$$
$$t \mapsto \Big(x_1 \cos(2\pi t) - y_1 \operatorname{sen}(2\pi t),\ y_1 \cos(2\pi t) + x_1 \operatorname{sen}(2\pi t), \cdots$$
$$\cdots, x_n \cos(2\pi t) - y_n \operatorname{sen}(2\pi t),\ y_n \cos(2\pi t) + x_n \operatorname{sen}(2\pi t)\Big)$$

Dicha función es analoga a la obtenida con anterioridad. Siguiendo con el procedimiento, se llega a que la función hamiltoniana $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ asociada a la variedad es:

$$H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n) \mapsto -\pi \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 + (y_i)^2$$

Es notorio que la función sigue siendo definida negativa por lo que $H(\mathbb{R}^{2n}) = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y su único punto crítico es el 0. Lo anterior garantiza que si $\alpha < 0$, entonces el conjunto $H^{-1}(\alpha) \neq \emptyset$ y es $\mathbb{S}^1$-invariante (la comprobación de esto último es igual a la desarrollada con anterioridad).

Consideremos el conjunto $H^{-1}(-\pi) = \{(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} : -\pi(x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_n^2) = -\pi\} = \mathbb{S}^{2n-1}$.
Fijemos un punto $p \in \mathbb{S}^{2n-1}$ y y calculemos su correspondiente orbita

$$O_{\mathbb{S}^1}(p) = \{\big(x_1 cos(2\pi t) - y_1 sen(2\pi t), x_1 sen(2\pi t) + y_1 cos(2\pi t), \cdots$$
$$\cdots, x_n cos(2\pi t) - y_n sen(2\pi t), x_n sen(2\pi t) + y_n cos(2\pi t)\big) : t \in [0, 1]\}.$$

$O_{\mathbb{S}^1}(p)$ sigue siendo homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ por lo que el espacio de orbitas $O_{\mathbb{S}^1}(p)/\sim\ = \mathbb{S}^{2n-1}/\sim$ seguirá siendo homeomorfo a $\mathbb{S}^{2n-1}/\mathbb{S}^1$. Así como $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^2 \cong \mathbb{CP}^1$, se puede demostrar, de manera análoga a como se hizó con $\mathbb{S}^3$, que $\mathbb{S}^{2n-1}/\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^{2n} \cong \mathbb{CP}^{n-1}$. Esto generaliza lo que Heinz Hopf descubrió. La $2n-1$-esfera puede descomponerse en 1-esferas disjuntas y la cantidad de dichas circunferencias es igual a la cantidad de elementos presentes en $\mathbb{S}^{2n}$

5. Conclusión

La geometría simpléctica es un área de la matemática moderna que se encarga de estudiar a las variedades simplécticas y a los espacios vectoriales asociados a estas. Los grupos que actúan en las variedades así como las formas simplécticas asociadas, revelan información importante acerca del comportamiento y la estructura de dichas variedades. Cuando las variedades simplécticas son compactas y conexas y están asociadas a la acción de un toro $\mathbb{T}^n$ cuya dimensión es igual a la mitad de la dimensión de la variedad, decimos que la variedad simpléctica es tórica. Toda variedad tórica está asociada a un único politopo de Delzant mediante una función μ. En efecto, el teorema de Delzant establece que existe una biyección entre el conjunto de las variedades simplécticas tóricas y los politopos de Delzant.

Cuando nos enfocamos en un grupo G que actúa sobre $\mathbb{R}^{2n}$ por medio de una acción hamiltoniana $*$, el método de reducción simpléctica permite obtener otro espacio vectorial simpléctico mediante elespacio de orbitas de la imagen inversa de un punto regular via la funcion hamiltoniana H obtenida de la ecuación $\Omega(X, *) = dH$ para el campo vectorial X que proviene de la función $f : G \to \mathbb{R}^{2n}$ tal que $f(t) = t * x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^{2n}$ fijo. Cuando el grupo es $\mathbb{S}^1$, se puede demostrar la descomposición de la 3-esfera en 1-esferas observando que la orbita de cualquier elemento es homeomorfa a $\mathbb{S}^1$ y que el espacio de orbitas $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ es homeomorfo a $\mathbb{CP}^1$. Lo último se generaliza viendo que $\mathbb{S}^{2n-1}/\mathbb{S}^1$ es homeomorfo a $\mathbb{CP}^{n-1}$.

En este trabajo solo nos limitamos a enunciar los conceptos basicos de la geometría simpléctica, estudiar ciertas acciones sobre variedades simplécticas, obtener nuevos espacios vectoriales simplécticos con el método de reducción simpléctica y demostrar la descomposición de la 3-esfera de una manera diferente a la realizada por Heinz Hopf. Queda mucho por ver de la geometría simpléctica: simpléctomorfismos, difeomorfismos, grupos simplécticos, grupo de difeomorfismos y un largo etcetera. Para estudiar esta rama de las matemáticas es deseable tener mucha madurez matemática y conocimientos en diversas áreas tales como: topología algebraica, topologia diferencial, geometría algebraica, geometría diferencial,etc. Tales materias no han sido estudiadas por un servidor por lo que este trabajo no resultará muy util para aquellos que buscan algo más avanzado. Aun así, considero que se definieron de manera optima dos de los objetos fundamentales de la geometría simpléctica: espacio vectorial simpléctico y variedad simpléctica tórica. Además, se dio una introducción al método de reducción simpléctica y a la fibración de Hopf. Este trabajo cumple con ser un preambulo a lo que se debe de estudiar después; sienta los inicios en el estudio de la geometría simpléctica y plantea, o al menos eso intenta, el interes por seguir desarrollando esta área poco conocida de las matemáticas actuales.

Referencias

[1] Ana Cannas da Silva. Symplectic geometry. In *Handbook of differential geometry. Vol. II*, pages 79–188. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2006.

[2] Dusa McDuff. The topology of toric symplectic manifolds. *Geom. Topol.*, 15(1):145–190, 2011.

[3] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to symplectic topology.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1998.